Udruženje matematičara Zeničko-dobojskog kantona

Zmaja od Bosne 56, 72000 Zenica

umzdk2021@gmail.com

MART, 2023.

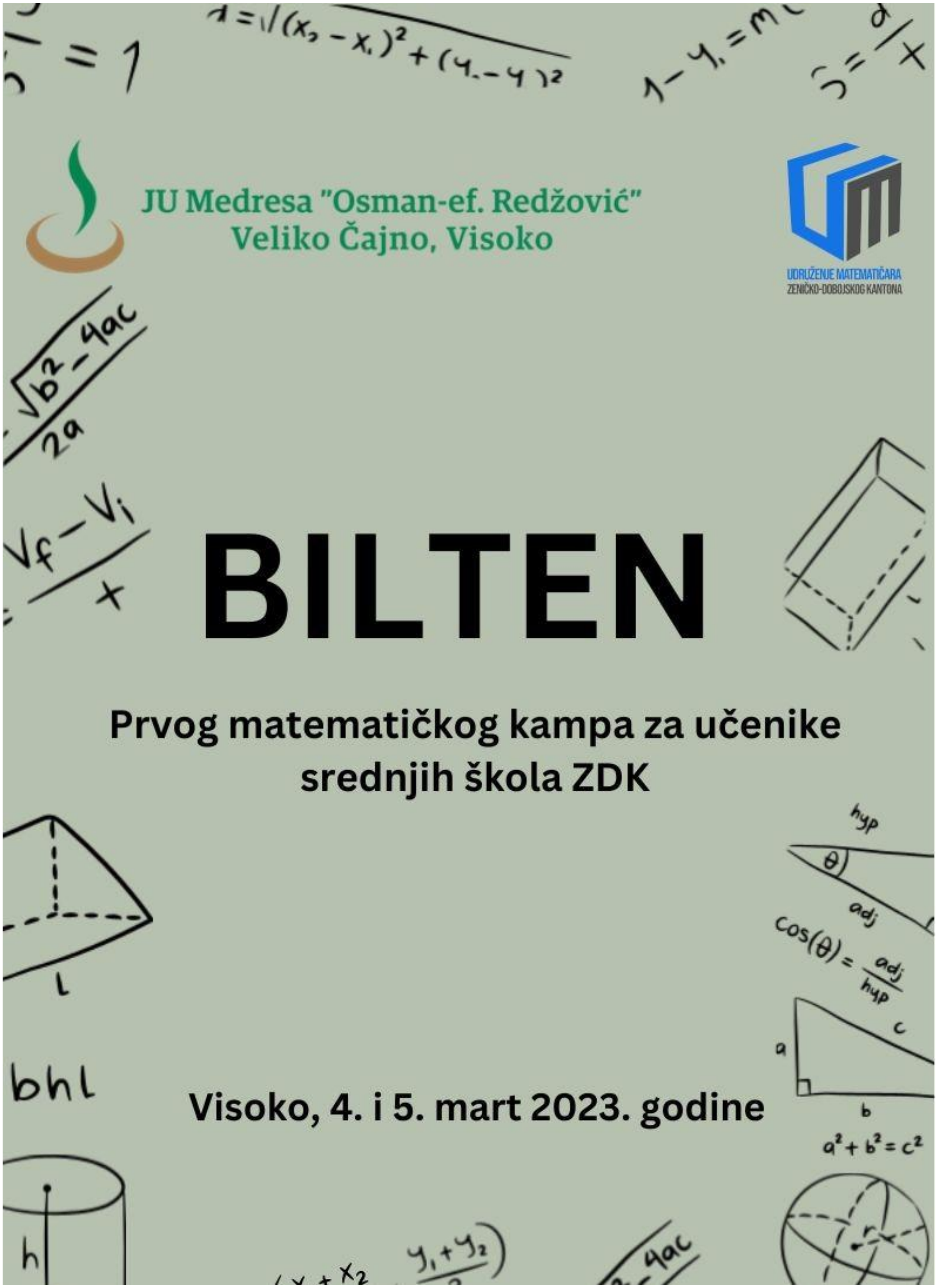
BILTEN

1. MATEMATIČKI KAMP UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA ZENIČKO-DOBOJSKOG KANTONA

UDRUŽENJE MATEMATIČARA
ZENIČKO-DOBOJSKOG KANTONA

Visoko, 4. i 5. mart 2023. god.

www.umzdk.unze.ba


JU Medresa "Osman-ef. Redžović"
Veliko Čajno, Visoko
UDRUŽENJE MATEMATIČARA
ZENIČKO-DOBOJSKOG KANTONA
BILTEN
Prvog matematičkog kampa za učenike
srednjih škola ZDK
Visoko, 4. i 5. mart 2023. godine

Organizacija: Udruženje matematičara ZDK, Federalno ministarstvo obrazovanja i nauke

Domaćin: Medresa "Osman ef. Redžović", Čajangrad 69, Veliko Čajno 71300, Visoko

Info: umzdk2021@gmail.com

Lokacija održavanja prvog matematičkog kampa za učenike srednjih škola ZDK:

Pregled zaduženja povodom prvog matematičkog kampa za učenike srednjih škola ZDK:

ORGANIZACIONI ODBOR

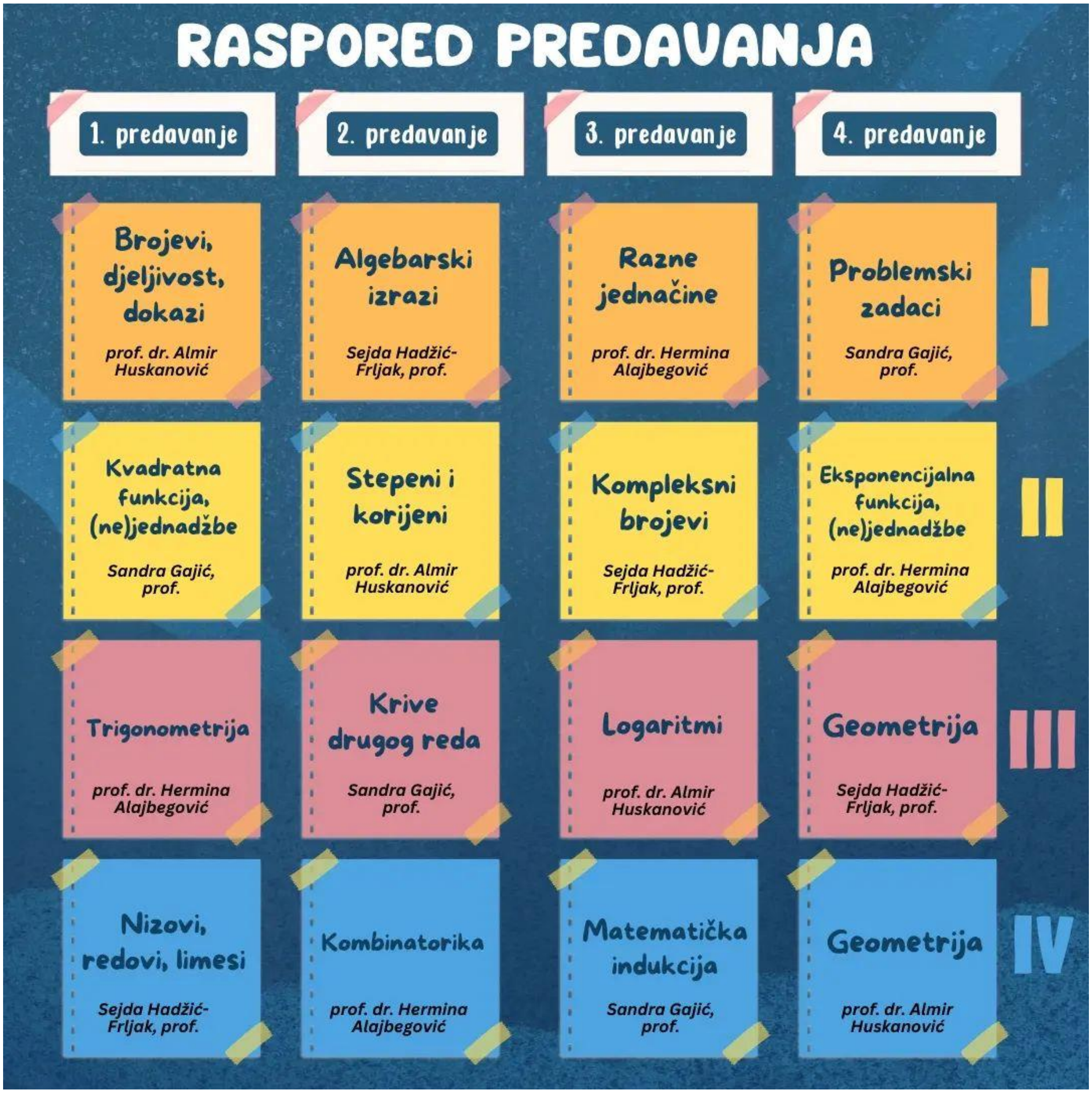
1. prof. dr. Naida Bikić, predsjednik
2. prof. Vehid Kurtić, član
3. prof. Edina Kadrić Durmiš, član
4. Narcisa Hadžajlić, član
5. Amna Gačić, član
6. Lea Kokorović, izrada biltena

KOMISIJA ZA PREDAVANJA I TESTOVE

1. prof. dr. Almir Huskanović
2. prof. dr. Hermina Alajbegović
3. Sejda Hadžić-Frljak, prof.
4. Sandra Gajić, prof.

Raspored održavanja prvog matematičkog kampa za učenike srednjih škola ZDK:

Raspored predavanja na matematičkom kampu za učenike srednjih škola ZDK:



SPISAK UČESNIKA

I razred

R.br.	Ime i prezime	Mail adresa	Općina/Grad
1.	Aiša Begović	begovica5555@gmail.com	Visoko
2.	Vedad Čišija	cisijadzenana@gmail.com	Visoko
3.	Lamija Čučuk	cucukmelisa@gmail.com	Visoko
4.	Mak Karabeg	makkarabeg@gmail.com	Zenica
5.	Emin Kečić	eminkecic@gmail.com	Visoko
6.	Hamza Kevilj	keviljhamza@gmail.com	Kakanj
7.	Una Kotorić	u.kotoric@gmail.com	Općina Maglaj
8.	Malik Kovač	kovacmalik10@gmail.com	Breza
9.	Lejla Likić	lejlalikic78@gmail.com	Vareš Majdan
10.	Najda Mulalić	najdamulalicc@gmail.com	Općina Maglaj
11.	Amina Omanović	aminaaa.omanovic@gmail.com	Visoko
12.	Merjem Sikirić	merjem.sikiric@gmail.com	Kakanj
13.	Emina Topovčić	eminatopovcic22@gmail .com	Općina Maglaj
14.	Irma Tukić	tukicirmaa@gamil.com	Općina Tešanj

SPISAK UČESNIKA

II razred

R.br.	Ime i prezime	Mail adresa	Općina/Grad
1.	Sumeja Dervić	sumejadervic2005@gmail.com	Vareš
2.	Umma Farah Drugović	ummafarahdrugovic@gmail.com	Zenica
3.	Kerim Fetić	kerimfetic@gmail.com	Zenica
4.	Sumeja Hasanspahić	sumejahasanspahic@gmail.com	Breza
5.	Azemina Junuzović	junuzovicazemina79@gmail.com	Kakanj
6.	Ilhana Kvakić	ilhana.kvakic@gmail.com	Visoko
7.	Medina Mehmedović	medina.meh1512@gmail.com	Visoko
8.	Amela Smolo	smolo.amela@gmail.com	Visoko
9.	Hasena Solak	hasena.solak3003@gmail.com	Breza
10.	Nidal Abdurrahman Šahman	nidal.abdurrahman.sahman@tscze.ba	Busovača
11.	Mario Šantić	jirendared@hotmail.com	Zenica

SPISAK UČESNIKA

III razred

R.br.	Ime i prezime	Mail adresa	Općina/Grad
1.	Lamija Alić	aliclamija67@gmail.com	Breza
2.	Ajla Alijagić	alijagic.ajla7185@gmail.com	Visoko
3.	Iman Bećirović	imanbecircic20@gmail.com	Općina Zenica
4.	Ajla Bjelić	bjelica006@gmail.com	Zavidovići
5.	Bakir Čajo	cajo.bakir1@gmail.com	Kakanj
6.	Tarik Čajo	tarikcajo2000@gmail.com	Kakanj
7.	Lejla Fejzić	fejziclejla34@gmail.com	Zavidovići
8.	Nadža Ganić	nadzaganic1@gmail.com	Visoko
9.	Kanita Hadžić	kanitahadzic123@gmail.com	Zavidovići
10.	Adin Kovačević	adin.kovacevic56@gmail.com	Zavidovići
11.	Ramo Kozlić	Ramokozlic62@gmail.com	Nemila
12.	Mugdin Krnjić	mugdin.krnjic20@gmail.com	Kakanj
13.	Faris Mahovac	fmahovac@gmail.com	Zavidovići
14.	Lejla Mehić	lejlanehic995@gmail.com	Zenica
15.	Osman Puščul	osmanmatematicar@hotmail.com	Visoko
16.	Amina Šabanović	asabanovicc5@gmail.com	Zenica
17.	Muaz Šabanović	muaz.sabanovic77@gmail.com	Visoko
18.	Haris Šabić	Sabicharis9@gmail.com	Kakanj
19.	Jusuf Zaimović	zzjusuf@gmail.com	Breza

SPISAK UČESNIKA

IV razred

R.br.	Ime i prezime	Mail adresa	Općina/Grad
1.	Enis Adilović	enis-adilovic@hotmail.com	Visoko
2.	Harun Bajramović	harun.bajramovicvisoko@gmail.com	Visoko
3.	Emin Begić	gichbee@gmail.com	Visoko
4.	Ajla Bukva	bukvaajla2004@gmail.com	Ilijaš
5.	Ismar Čamdžić	ismarcamdzic112@gmail.com	Tešanj
6.	Nejla Čelebić	nejla.celebic13@gmail.com	Visoko
7.	Fatih Durić	fatihduric10@gmail.com	Visoko
8.	Ilma Hindija	hindijailma@gmail.com	Visoko
9.	Arnela Hodzić	arnela.hodzic@tscze.ba	Busovača
10.	Davud Sakić	davud.sakic@tscze.ba	Zenica

JU Medresa "Osman-ef. Redžović"
Veliko Čajno, Visoko

UDRUŽENJE MATEMATIČARA
ZENIČKO-DOBOJSKOG KANTONA

UDRUŽENJE MATEMATIČARA ZENIČKO-DOBOJSKOG KANTONA

Matematički kamp za učenike srednjih škola
Zeničko-dobojskog kantona

Visoko, 5. mart 2023. godine

TEST ZA UČENIKE I RAZREDA

1. Dokazati da $30 \mid n^{19} - n^7$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

2. Za koje vrijednosti realnog parametra a jednačina

$$\frac{a-5}{x+1} - \frac{7+3a}{x-2} = \frac{2ax-5}{x^2-x-2}$$

   nema rješenja?

3. Tri traktora oru njivu. Ako prva dva traktora rade zajedno, treba im 15 dana da preoru cijelu njivu. Prvi i treći traktor preoru njivu radeći zajedno 8 dana, a sva tri traktora preoru njivu za 6 dana. Koliko dana svakom od traktora treba da samostalno preore cijelu njivu?

4. Ako je $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$, dokazati da je

$$\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} = -3.$$

****

Svaki tačno urađen zadatak se boduje sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 105 minuta.

JU Medresa "Osman-ef. Redžović"
Veliko Čajno, Visoko

UDRUŽENJE MATEMATIČARA
ZENIČKO-DOBOJSKOG KANTONA

UDRUŽENJE MATEMATIČARA ZENIČKO-DOBOJSKOG KANTONA

Matematički kamp za učenike srednjih škola
Zeničko-dobojskog kantona

Visoko, 5. mart 2023. godine

TEST ZA UČENIKE II RAZREDA

1. Izračunati broj $\left(\sqrt[6]{8\sqrt{5}+16}+\sqrt{\sqrt{5}+1}\right)\cdot\sqrt{\sqrt{5}-1}$.
2. Riješiti jednačinu: $3\cdot 4^x+\frac{1}{3}\cdot 9^{x+2}=6\cdot 4^{x+1}-\frac{1}{2}\cdot 9^{x+1}$.
3. Odredite brojeve p i q, ako je poznato da je razlika korijena (rješenja) jednačine $x^2+px+q=0$ jednaka 5, a razlika njihovih kubova 35.
4. Odrediti sve kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju sistem uslove:

$$|z-2i|=|z|$$
$$|z-i|=|z-1|.$$

****

Svaki tačno urađen zadatak se boduje sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 105 minuta.

JU Medresa "Osman-ef. Redžović"
Veliko Čajno, Visoko

UDRUŽENJE MATEMATIČARA
ZENIČKO-DOBOJSKOG KANTONA

UDRUŽENJE MATEMATIČARA ZENIČKO-DOBOJSKOG KANTONA

Matematički kamp za učenike srednjih škola
Zeničko-dobojskog kantona

Visoko, 5. mart 2023. godine

TEST ZA UČENIKE III RAZREDA

1. Izračunati broj $A = log^2_{\sqrt[5]{\sqrt{5}}}\sqrt{5} - log_{\sqrt[3]{\sqrt{5}}}5\sqrt{5} + log_{(\sqrt{3}+1)}(4+2\sqrt{3})$.

2. Ako je $\cos\alpha + \cos\beta = \frac{1}{2}$ i $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{1}{4}$, koliko je $\cos(\alpha - \beta)$?

3. Odrediti jednadžbu hiperbole, ako je udaljenost između fokusa koji leže na osi x jednaka $2e = 10\sqrt{3}$, a jednadžbe asimptota su $y = \pm\frac{3}{4}x$. Izračunati površinu trougla OMN, kome dvije stranice pripadaju asimptotama hiperbole, a treća stranica pravoj čija je jednadžba $x - 4 = 0$.

4. Date su jednačine dvije paralelne stranice pravougaonika: $5x + 2y - 7 = 0$ i $5x + 2y - 36 = 0$, i jednačina jedne dijagonale: $3x + 7y - 10 = 0$. Odredi jednačine ostalih stranica pravougaonika, druge dijagonale, i koordinate tjemena pravougaonika.

****

Svaki tačno urađen zadatak se boduje sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 105 minuta.

JU Medresa "Osman-ef. Redžović"
Veliko Čajno, Visoko

UDRUŽENJE MATEMATIČARA
ZENIČKO-DOBOJSKOG KANTONA

UDRUŽENJE MATEMATIČARA ZENIČKO-DOBOJSKOG KANTONA

Matematički kamp za učenike srednjih škola
Zeničko-dobojskog kantona

Visoko, 5. mart 2023. godine

TEST ZA UČENIKE IV RAZREDA

1. Dat je kvadrat $CKME$ stranice a. Kroz vrh M tog kvadrata povučena je prava l koja siječe pravu CK u tački A, a pravu CE u tački B. Odrediti ugao pod kojim prava l siječe pravu CK, tako da površina trougla ABC bude minimalna.

2. Dato je 10 skupina po 10 kuglica. U 9 skupina su kuglice težine 10 grama, a u jednoj su nešto lakše i teže 9 grama. Kako u jednom mjerenju na digitalnoj vagi odrediti u kojoj skupini se nalaze lakše kuglice?

3. Neka su $a_1, a_2, \dots, a_n$ realni brojevi, takvi da je $-1 < a_i \leq 0$ $(i = 1,2, \dots, n)$. Dokazati da za svako $n \in N$ važi nejednakost:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

4. Ako se četiri broja koja su članovi geometrijskog niza uvećaju, redom, za 5, 6, 9 i 15 dobijaju se brojevi koji čine aritmetički niz. Odrediti te brojeve.

****

Svaki tačno urađen zadatak se boduje sa 10 bodova.
Izrada zadataka traje 105 minuta.

Moguća rješenja zadataka za I razred

1. Dokazati da $30|n^{19}-n^7$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Rješenje:

$$\begin{aligned} A = n^{19}-n^7 = n^7(n^{12}-1) &= n^7(n^6-1)(n^6+1) \\ &= n^7(n^3-1)(n^3+1)(n^2+1)(n^4-n^2+1) \\ &= n^7(n-1)(n^2+n+1)(n+1)(n^2-n+1)(n^2+1)(n^4-n^2+1) \end{aligned}$$

Očito je da $6|A$, jer je $(n-1)n(n+1)$ proizvod 3 uzastopna prirodna broja, pa je on djeljiv sa 6.

Ostalo je još da se dokaže da $5|A$.

Ako je $n=5k$, tvrdnja očito važi.

Ako je $n=5k+1$, tada $5|n-1$.

Ako je $n=5k+2$ ili $n=5k+3$, tada $5|n^2+1$.

Ako je $n=5k+4$, tada $5|n+1$.

2. Za koje vrijednosti realnog parametra a jednačina

$$\frac{a-5}{x+1}-\frac{7+3a}{x-2}=\frac{2ax-5}{x^2-x-2}$$

nema rješenja?

Rješenje:

Množenjem jednačine sa $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$ nakon sređivanja se dobije $4(a+3)x=8-5a$.

Za $a=-3$ je $8-5\cdot(-3)\neq 0$ i stoga za $a=-3$ jednačina nema rješenja.

Iz istih razloga $x=-1$ i $x=2$ ne mogu biti rješenja.

Uvrstimo li $x=-1$ dobivamo $a=20$, odnosno za $x=2$ dobivamo $a=-\frac{16}{3}$.

Dakle, za $a \in \left\{-3, -\frac{16}{3}, 20\right\}$ jednačina nema rješenja, a ako je $a \in R \ \left\{-3, -\frac{16}{3}, 20\right\}$ rješenje jednačine je $x = \frac{8-5a}{4(a+3)}$

3. Tri traktora oru njivu. Ako prva dva traktora rade zajedno, treba im 15 dana da preoru cijelu njivu. Prvi i treći traktor preoru njivu radeći zajedno 8 dana, a sva tri traktora preoru njivu za 6 dana. Koliko dana svakom od traktora treba da samostalno preore cijelu njivu?

Rješenje:

Neka su a,b i c redom brojevi dana potrebnih svakom od traktora da preore cijelu njivu sam. Oni u jednom danu preoru redom a-ti dio njive, b-ti dio njive, odnosno c-ti dio njive.

Zato imamo sistem:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{15}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{6}$$

Oduzmemo li od zadnje jednakosti prvu, dobijamo $\frac{1}{c} = \frac{1}{6} - \frac{1}{15} = \frac{1}{10}$, odnosno c = 10.

Oduzmemo li od zadnje drugu, dobijemo $\frac{1}{b} = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$, odnosno b=24.

Konačno, uvrštavajući dobiveno u bilo koju od početnih jednakosti, dobivamo da je a = 40.

Dakle, da bi preorali njivu, prvom traktoru samom treba 40 dana, drugom 24, a trećem 10 dana.

4. Ako je $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$, dokazati da je

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=-3.$$

Rješenje:

Pođimo od:

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=-\frac{1}{c}$

$\frac{b+a}{ab}=-\frac{1}{c}$

$a+b=-\frac{ab}{c}$ / c (podijelimo sa c da bi napravili izraz iz zadatka)

$\frac{a+b}{c}=-\frac{ab}{c^2}$

Slično će biti:

$\frac{b+c}{a}=-\frac{bc}{a^2}$

$\frac{c+a}{b}=-\frac{ca}{b^2}$

$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=$

$-\frac{bc}{a^2}-\frac{ca}{b^2}-\frac{ab}{c^2}=$ (proširimo ih redom sa a,b i c)

$-\frac{abc}{a^3}-\frac{abc}{b^3}-\frac{abc}{c^3}=$ (izvučemo –abc)

$=-abc\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)$ (tražimo izraz u zagradi)

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=-\frac{1}{c}$ / $(\,)^3$

$\frac{1}{a^3}+3\cdot\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b}+3\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b^3}=-\frac{1}{c^3}$

$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{3}{ab}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=-\frac{1}{c^3}$

$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{3}{ab}\left(-\frac{1}{c}\right)=-\frac{1}{c^3}$

$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} - \frac{3}{abc} = -\frac{1}{c^3}$

$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$ (vratimo se u zadatak)

= - abc $\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right)$

= - abc $\cdot \frac{3}{abc} = -3$

Moguća rješenja zadataka za II razred

1. Izračunati broj $\left(\sqrt[6]{8\sqrt{5}+16}+\sqrt{\sqrt{5}+1}\right)\cdot\sqrt{\sqrt{5}-1}$.

Rješenje:

$$\left(\sqrt[6]{8\sqrt{5}+16}+\sqrt{\sqrt{5}+1}\right)\cdot\sqrt{\sqrt{5}-1}.=\sqrt[6]{(8\sqrt{5}+16)(\sqrt{5}-1)^3}+\sqrt{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}$$

$$=\sqrt[6]{(8\sqrt{5}+16)(5\sqrt{5}-15+3\sqrt{5}-1)}+\sqrt{5-1}=\sqrt[6]{(8\sqrt{5}+16)(8\sqrt{5}-16)}+2$$

$$=\sqrt[6]{64\cdot 5-256}+2=\sqrt[6]{64}+2=2+2=4.$$

2. Riješiti jednačinu: $3\cdot 4^x+\frac{1}{3}\cdot 9^{x+2}=6\cdot 4^{x+1}-\frac{1}{2}\cdot 9^{x+1}$.

Rješenje:

$$3\cdot 2^{2x}+\frac{3^{2x+4}}{3}=2\cdot 3\cdot 2^{2x+2}-\frac{1}{2}3^{2x+2}$$

$$3\cdot 2^{2x}+3^{2x+3}=3\cdot 2^{2x+3}-\frac{1}{2}3^{2x+2}$$

$$3\cdot 2^{2x+1}+2\cdot 3^{2x+3}=3\cdot 2^{2x+4}-3^{2x+2}$$

$$3^{2x+2}+2\cdot 3^{2x+3}=3\cdot 2^{2x+4}-3\cdot 2^{2x+1}$$

$$3^{2x}(9+54)=2^{2x}(48-6)$$

$$3^{2x+1}=2^{2x+1}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x+1}=1$$

3. Odredite brojeve p i q, ako je poznato da je razlika korijena (rješenja) jednačine $x^2 + px + q = 0$ jednaka 5, a razlika njihovih kubova 35.

Rješenje:

Prema uvjetu zadatka (x_1 - x_2 = 5 ∧ x_1^3 - x_2^3 = 35) ⇒ x_1^2 +x_1x_2 + x_2^2 = 7

Sada je:

q = $x_1 \cdot x_2$ = $\frac{1}{3}$ [(x_1^2 +x_1x_2 + x_2^2) – $(x_1 - x_2)^2$] = $\frac{1}{3}$ (7 – 25) = -6

p^2 = $(x_1 + x_2)^2$ = $(x_1 - x_2)^2$ + 4x_1x_2 = 25 – 24 = 1 ⇒ p = ± 1

4. Odrediti sve kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju sistem uslove:

$$|z - 2i| = |z|$$
$$|z - i| = |z - 1|.$$

Rješenje:

Neka je z = a + bi.

z – 2i = a + bi – 2i = a + i(b – 2) ⇒ |z – 2i| = $\sqrt{a^2 + (b-2)^2}$

z – i = a + bi – i = a + i(b – 1) ⇒ |z – i| = $\sqrt{a^2 + (b-1)^2}$

z – 1 = a + bi – 1 = a – 1 + bi ⇒ |z – 1| = $\sqrt{(a-1)^2 + b^2}$

Dakle:

$$\sqrt{a^2 + (b-2)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\sqrt{a^2 + (b-1)^2} = \sqrt{(a-1)^2 + b^2}$$

Kvadrirajmo obe jednačine!

$$a^2 + (b-2)^2 = a^2 + b^2$$
$$a^2 + (b-1)^2 = (a-1)^2 + b^2$$

$$b^2 - 4b + 4 = b^2$$

$$-4\mathrm{b} = -4$$

$$\boldsymbol{b = 1}$$

Zamijenimo u drugu jednačinu:

$$a^2 + (b-1)^2 = (a-1)^2 + b^2$$

$$a^2 + (1-1)^2 = (a-1)^2 + 1^2$$

$$a^2 + 0^2 = a^2 - a + 1 + 1$$

$$2\text{ a} = 2$$

$$\boldsymbol{a = 1}$$

Traženi kompleksni broj je z = 1 + i.

Moguća rješenja zadataka za III razred

1. Izračunati broj $A = log^2_{\sqrt[5]{5}}\sqrt{5} - log_{\sqrt[3]{5}}5\sqrt{5} + log_{(\sqrt{3}+1)}(4+2\sqrt{3})$.

Rješenje:

$$log^2_{\sqrt[5]{5}}\sqrt{5} = \left(log_{\sqrt[5]{5}}\sqrt{5}\right)^2 = \left(\frac{log_5\sqrt{5}}{log_5\sqrt[5]{5}}\right)^2 = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{5}}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

$$log_{\sqrt[3]{5}}5\sqrt{5} = \frac{log_5 5\sqrt{5}}{log_5\sqrt[3]{5}} = \frac{log_5 5^{\frac{3}{2}}}{log_5 5^{\frac{1}{3}}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{2}$$

$$log_{(\sqrt{3}+1)}(4+2\sqrt{3}) = log_{(\sqrt{3}+1)}(3+1+2\sqrt{3}) = log_{(\sqrt{3}+1)}\left(\sqrt{3}+1\right)^2 = 2$$

pa je $A = \frac{25}{4} - \frac{9}{2} + 2 = \frac{15}{4}$.

2. Ako je $\cos\alpha + \cos\beta = \frac{1}{2}$ i $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{1}{4}$, koliko je $\cos(\alpha - \beta)$?

Rješenje:

Kvadriranjem svake od jednačina: $\cos\alpha + \cos\beta = \frac{1}{2}$ i $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{1}{4}$ dobijemo

$\cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta = \frac{1}{4}$ i $\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta = \frac{1}{16}$.

Sabiranjem posljednje dvije jednakosti i primjenom trigonometrijskog identiteta dobije se:

$$2 + 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = \frac{5}{16}$$

$$2\cos(\alpha - \beta) = \frac{-27}{16}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = -\frac{27}{32}.$$

3. Odrediti jednadžbu hiperbole, ako je udaljenost između fokusa koji leže na osi x jednaka $2e = 10\sqrt{3}$, a jednadžbe asimptota su $y = \pm\frac{3}{4}x$. Izračunati površinu trougla OMN, kome dvije stranice pripadaju asimptotama hiperbole, a treća stranica pravoj čija je jednadžba $x - 4 = 0$.

Rješenje:

Udaljenost između fokusa je 2e =$10\sqrt{3}$, gdje je $e = \sqrt{a^2 + b^2}$ (1 bod), odakle je $a^2 + b^2 = 75$ (*) (1 bod).

Iz jednačina asimptota $y = \pm\frac{b}{a}x$ i zadanih jednačina asimptota $y = \pm\frac{3}{4}x$ slijedi $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$ (**)

Jednačine (*) i (**) čine sistem, odakle je $a_2 = 48$ i $b_2 = 27$ (1,5 bodova), pa jednačina hiperbole glasi $9x_2-16y_2 = 432$.

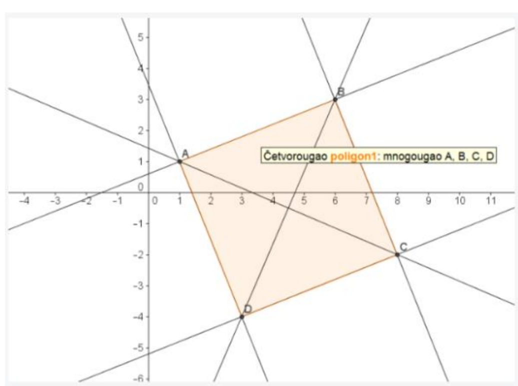
Rješavanjem sistema jednačina$y = -\frac{3}{4}x \wedge y = \frac{3}{4}x \wedge x = 4$ (1 bod) dobijemo vrhove trougla O(0,0), M(4,-3), N(4,3).

Iz formule za površinu trougla $2P = |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$ (1 bod) imamo da je P = 12 kv. jed.

(A može i ovako: u trouglu OMN osnovica |MN|=6 m.j. i visina h=4 m.j., pa je P = 12 kv. j.)

4. Date su jednačine dvije paralelne stranice pravougaonika: $5x + 2y - 7 = 0$ i $5x + 2y - 36 = 0$, i jednačina jedne dijagonale: $3x + 7y - 10 = 0$. Odredi jednačine ostalih stranica pravougaonika, druge dijagonale, i koordinate tjemena pravougaonika.

Rješenje:



Presječne tačke dvaju paralnih pravih i prave kojoj pripada djiagonala sijeku se u tačkama A i C:

Tačka A:

$5x + 2y = 7 \wedge 3x + 7y = 10, x = \frac{10 - 7y}{3}$

$5 \cdot \frac{10-7y}{3} + 2y = 7 \,/\cdot 3$

$50 - 35y + 6y = 21, y = 1, x = 1$

$A = (1,1)$

Tačka C:

$5x + 2y = 36 \wedge 3x + 7y = 10, x = \frac{10 - 7y}{3}$

$5 \cdot \frac{10-7y}{3} + 2y = 36 \,/\cdot 3$

$50 - 35y + 6y = 108, y = -2, x = 8$

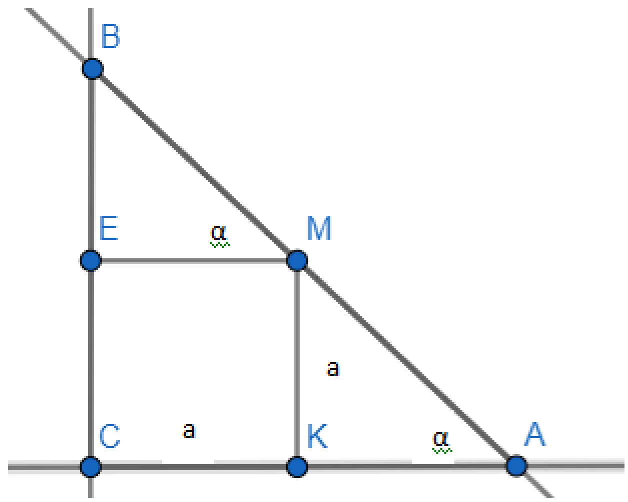
$C = (8, -2)$.

Koeficijenti pravca druge dvije prave kojima pripadaju stranice pravougaonika su isti i iznose $\frac{2}{5}$, jer su koeficijenti pravca datih paralelnih pravih $-\frac{5}{2}$. Jedna prava određena je tačkom A i koeficijentom pravca, a druga prava tačkom C i koeficijentom pravca.

Moguća rješenja zadataka za IV razred

1. Dat je kvadrat $CKME$ stranice a. Kroz vrh M tog kvadrata povučena je prava l koja siječe pravu CK u tački A, a pravu CE u tački B. Odrediti ugao pod kojim prava l siječe pravu CK, tako da površina trougla ABC bude minimalna.

Rješenje:



Neka je $\overline{AK} = x$ i $\overline{EB} = y$. Očito su trouglovi KAM i EMB slični, pa imamo proporciju:

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{y} \Rightarrow y = \frac{a^2}{x}.$$

Površina trougla ABC iznosi:

$$P = \frac{(x+a)(y+a)}{2} = \frac{xy + ax + ay + a^2}{2} = \frac{a^2 + ax + a \cdot \frac{a^2}{x} + a^2}{2}$$

$$\Rightarrow P = a^2 + \frac{ax}{2} + \frac{a^3}{2x}.$$

Pošto je površina P funkcija koja zavisi od x i tražimo njen minimum, računat ćemo izvod:

$$P' = \frac{a}{2} - \frac{a^3}{2x^2}$$

i dalje imamo:

$$P' = 0 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = a \text{ (jer je } x > 0 \text{ i } a > 0).$$

Kako je $P'' = \frac{a^3}{x^3}$ imamo da je $P''(a) = 1$, što znači da funkcija $P(x)$ dostiže svoj minimum u tački $x = a$. Tada je i $y = a$ i ako je α traženi ugao, imamo da je tg $\alpha = 1$, dakle $\alpha = 45^0$.

Napomena: Zadatak se može riješiti i bez izvoda, ako iskoristimo nejednakost:

$$(x - a)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + a^2 \geq 2ax$$

$$\Rightarrow P = a^2 + \frac{ax}{2} + \frac{a^3}{2x} = a^2 + \frac{a(x^2 + a^2)}{2x} \geq a^2 + a^2 = 2a^2$$

Znak jednakosti se postiže za $x = a$, itd. kao u prvom načinu.

2. Dato je 10 skupina po 10 kuglica. U 9 skupina su kuglice težine 10 grama, a u jednoj su nešto lakše i teže 9 grama. Kako u jednom mjerenju na digitalnoj vagi odrediti u kojoj skupini se nalaze lakše kuglice?

Rješenje:

Iz prve kutije uzeti jednu kuglicu, iz druge dvije, iz treće tri kuglice i iz desete 10 kuglica I sve ih zajedno izvagati. Ako je masa svih kuglica zajedno 549 grama, to znači da su 54 kuglice iste težine od 10 grama i jedna od 9 grama pa su u prvoj kutiji lakše kuglice. Ako je masa 548 grama, to znači da su 53 kuglice po 10 grama i 2 po 9 grama, pa su lakše kuglice u drugoj kutiji. Slično zaključujemo ako je masa kuglica 547 grama i tako redom do 540 grama koliko najniža masa može biti.

3. Neka su $a_1, a_2, \dots, a_n$ realni brojevi, takvi da je $-1 < a_i \leq 0$ $(i = 1,2, \dots, n)$. Dokazati da za svako $n \in N$ važi nejednakost:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

***Rješenje*:**

1° Za n=1 tvrdnja je tačna jer 1+a_1 = 1+a_1
2° Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za n = k, tj. da je (1+a_1)(1+a_2) … (1+a_k) ≥ 1+ $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ (*)

Dokažimo da je tvrdnja tačna za n=k+1, tj. da je

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k)(1+a_{k+1}) \geq 1+a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{k+1}$$

Množeći obje strane nejednakosti (*) sa $1+a_{k+1} > 0$ dobijemo:

$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k)(1+a_{k+1}) \geq (1+a_1+a_2+\ldots+a_k)(1+a_{k+1})$, tj.

$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k)(1+a_{k+1}) \geq 1+a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{k+1}+a_1a_{k+1}+a_2a_{k+1}+\ldots+a_ka_{k+1}$

Pošto je suma $a_1a_{k+1}+a_2a_{k+1}+\ldots+a_ka_{k+1} > 0$, to je tačna tvrdnja za n=k+1.

Na osnovu principa matematičke indukcije tačna je nejednakost koju je trebalo dokazati za svako $n\in N$.

4. Ako se četiri broja koja su članovi geometrijskog niza uvećaju, redom, za 5, 6, 9 i 15 dobijaju se brojevi koji čine aritmetički niz. Odrediti te brojeve.

Rješenje:

GN: $a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4$

$\downarrow +5 \quad \downarrow +6 \quad \downarrow +9 \quad \downarrow +15$

AN: $b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4$

$b_2 = \frac{b_1+b_3}{2} \Rightarrow 2b_2 = b_1+b_3$

$b_3 = \frac{b_2+b_4}{2} \Rightarrow 2b_3 = b_2+b_4$

$2(a_2+6) = a_1+5+a_3+9$

$2(a_3+9) = a_2+6+a_4+15$

$2(a_2+6) = a_1+5+a_3+9$

$2(a_3+9) = a_2+6+a_4+15$

$2\,(a_1\,q + 6) = a_1 + a_1 q^2 + 14$

$2\,(a_1 q^2 + 9) = a_1 q + a_1 q^3 + 21$

$2a_1\,q + 12 = a_1 + a_1 q^2 + 14$

$2a_1 q^2 + 18 = a_1 q + a_1 q^3 + 21$

$a_1 - 2a_1 q + a_1 q^2 = -2$

$a_1 q - 2a_1 q^2 + a_1 q^3 = -3$

$\downarrow$

$a_1(1 - 2q + q^2) = -2$

$a_1 q\,(1 - 2q + q^3) = -3$

Dijeljenjem slijedi $\frac{1}{q} = \frac{2}{3} \Rightarrow q = \frac{3}{2}$

$a_1(1 - 3 + \frac{9}{4}) = -2$

$a_1\left(\frac{1}{4}\right) = -2 \Rightarrow a_1 = -8$

GN: -8, -12, -18, -27

AN: -3, -6, -9, -12

PLASMAN UČENIKA NA TAKMIČENJU

	I razred	II razred	III razred	IV razred
1.	Vedad Čišija	Amela Smolo	Nadža Ganić	Emin Begić
2.	Malik Kovač	Ilhana Kvakić	Osman Puščul	Enis Adilović
3.	Merjem Sikirić	Medina Mehmedović	Iman Bećirčić	Ilma Hindija

Slika 1. Nagrađeni učenici prvih razreda

Slika 2. Nagrađeni učenici drugih razreda

Slika 3. Nagrađeni učenici trećih razreda

Slika 4. Nagrađeni učenici četvrtih razreda

VISOKO, 04.03. 2023. i 05.03.2023.