KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
ZA I RAZRED

ZADACI

1. Izračunaj površinu figure ograničene pravom
$y = 4$ i grafikom $y = |x+1| + |x-1|$.

2. Dokazati da je $2^{10} + 5^{12}$ složen broj.

3. Naći sva rješenja jednačine $y^2 - x^2 = 4x + 11$ u skupu cijelih brojeva.

4. Postoji li trougao čije visine iznose

a) 3, 4, 5   b) 1, 2, 3 ?

Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta.
Dozvoljena je upotreba samo pribora za crtanje i pisanje.

Mnogo uspjeha u radu!

Kakanj, 22.03.2014.godine

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
Moguća rješenja zadataka za I razred

1. Grafik funkcije $y = |x+1| + |x-1|$ će imati tri grane

$$y=\begin{cases} -2x, & x< -1 \\ 2, & -1\leq x < 1 \\ 2x, & x\geq 1 \end{cases}$$

i gradit će sa pravom y=4 jednakokraki trapez. Tjemena trapeza su tačke s koordinatama: (−1,2);(1,2); (−2,4) i (2,4). Osnovice trapeza su 2 i 4 a visina trapeza dužine 2, pa je površina trapeza

$$P = \frac{4+2}{2}\cdot 2 = 6(kv.jed.)$$

2. Dati izraz $2^{10} + 5^{12} = (2^5 + 5^6)^2 - 2\cdot 2^5\cdot 5^6 = (2^5 + 5^6)^2 - 10^6 = (2^5 + 5^6 + 10^3)(2^5 + 5^6 - 10^3)$.
   Oba broja u zagradama su veća od 1, pa je dati broj složen.

3. Jednačinu možemo napisati u obliku $y^2 - (x + 2)^2 = 7$, odnosno u obliku $(y - x - 2)(y + x + 2) = 7$.
   Faktori broja 7 su: -7, -1, 1 i 7. Imamo sljedeća četiri slučaja:

   1° $\left.\begin{matrix} y - x - 2 = -7 \\ y + x + 2 = -1 \end{matrix}\right\}$ tj. x = 1, y = - 4

   2° $\left.\begin{matrix} y - x - 2 = -1 \\ y + x + 2 = -7 \end{matrix}\right\}$ tj. x = - 5, y = -4

   3° $\left.\begin{matrix} y - x - 2 = 1 \\ y + x + 2 = 7 \end{matrix}\right\}$ tj. x = 1, y = 4

   4° $\left.\begin{matrix} y - x - 2 = 7 \\ y + x + 2 = 1 \end{matrix}\right\}$ tj. x = - 5, y = 4

   Dakle, skup rješenja date jednačine je $\{(1,-4); (-5,-4); (1,4); (-5,4)\}$

4. Iz poznatih formula za površinu trougla imamo: $P = \frac{a\cdot h_a}{2} = \frac{b\cdot h_b}{2} = \frac{c\cdot h_c}{2}$, a odavde

$$a = \frac{2\cdot P}{h_a}\quad ;\quad b = \frac{2\cdot P}{h_b}\quad ;\quad c = \frac{2\cdot P}{h_c}.$$ Sada imamo

a) $a + b = \frac{2\cdot P}{h_a} + \frac{2\cdot P}{h_b} = \frac{2\cdot P}{3} + \frac{2\cdot P}{4} = \frac{7\cdot P}{6} > \frac{2\cdot P}{5} = c$, tj. $a + b > c$.

Analogno $a + c = \frac{16\cdot P}{15} > \frac{2\cdot P}{4} = \frac{P}{2} = b$; tj. $a + c > b$;

$b + c = \frac{P}{2} + \frac{2\cdot P}{5} = \frac{9\cdot P}{10} > \frac{2\cdot P}{3} = a$, tj. $b + c > a$. Dakle, ovakav trougao postoji.

b) Imamo: $a = \frac{2 \cdot P}{h_a} = 2P$, $b = \frac{2 \cdot P}{h_b} = P$, $c = \frac{2 \cdot P}{h_c} = \frac{2 \cdot P}{3}$,

te

$b + c = P + \frac{2 \cdot P}{3} = \frac{5 \cdot P}{3} < 2P = a$, tj. $b + c < a$, što znači da traženi trougao ne postoji.

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
ZA II RAZRED

ZADACI

1. Odredi sve kompleksne brojeve z, tako da važi $z - \bar{z} = 4 - 2i - |z - i|$.

2. U skupu realnih brojeva riješiti jednačinu $\frac{2}{x^2 - 4} + \frac{x-4}{x^2 + 2x} = \frac{1}{x^2 - 2x}$.

3. U Δ ABC vrijedi $\angle$ABC = 2 $\angle$BCA. Neka je BE (E $\in$AC) simetrala $\angle$ABC. Dokazati da je $AB^2 = AC \cdot AE$.

4. Odrediti sve prirodne brojeve n takve da je $3^{2n+1} - 4^{n+1} + 6^n$ prost broj.

Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta.
Dozvoljena je upotreba samo pribora za crtanje i pisanje.

Mnogo uspjeha u radu!

Kakanj, 22.03.2014.godine.

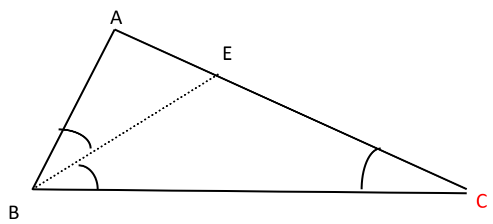
KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
Moguća rješenja zadataka za II razred

1. Neka je $z = x + yi, x, y \epsilon R$;
   Jednačina iz zadatka je ekvivalentna sa
$2(y+1)i = 4 - \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$. Pošto je lijeva strana poslednje jednačine čisto imaginarna, a desna realna poslednja jednačina je ekvivalentna sa
$2(y+1)i = 0 = 4 - \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$, tj. sa $y = -1 \ \wedge \ x^2 + 4 = 16 \Leftrightarrow x^2 = 12 \Leftrightarrow x \epsilon \{-2\sqrt{3}, \ 2\sqrt{3}\}$. Dakle, rješenje zadatka je $z \epsilon \{-2\sqrt{3} - i, 2\sqrt{3} - i\}$

2. Jednačina nije definisana ako je x $\in \{-2,0,2\}$

Za x $\neq \{-2, 0, 2\}$ važi $\frac{2}{x^2-4} + \frac{x-4}{x^2+2x} = \frac{1}{x^2-2x} \Leftrightarrow$ 2x + (x – 4)(x – 2) = x + 2 $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$. Rješenja ove jednačine su $x_1 = 2$ i $x_2 = 3$.
Međutim, kako jednačina nije definisana za x=2, jedino rješenje je x=3.

3. Kako je $\angle$BEA spoljašnji u ΔBCE, slijedi $\angle$BEA = $\angle$EBC + $\angle$BCE = $\angle$ABC, pa je
   ΔABC ~ ΔABE ($\angle$BEA = $\angle$ABC i $\angle$ABE = $\angle$BCA), pa je



$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AB}, \text{ tj.} \overline{AB}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AE}$$

4. $3^{2n+1} - 4^{n+1} + 6^n \Leftrightarrow 3^{2n+1} - 4 \cdot 2^{2n} + 2^n \cdot 3^n \Leftrightarrow 3 \cdot 3^{2n} - 3 \cdot 2^{2n} - 2^{2n} + 2^n \cdot 3^n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\,(3^{2n} - 2^{2n}) + 2^n(3^n - 2^n) \Leftrightarrow 3\,(3^n - 2^n)(3^n + 2^n) + 2^n(3^n - 2^n) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (3^n - 2^n)(3(3^n + 2^n) + 2^n) \Leftrightarrow (3^n - 2^n)(3^{n+1} + 3 \cdot 2^n + 2^n) \Leftrightarrow (3^n - 2^n)(3^{n+1} + 4 \cdot 2^n) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (3^n - 2^n)(3^{n+1} + 2^{n+2})$.

Da bi dobiveni proizvod bio prost broj jedan od faktora mora biti jednak jedan. Očito je $3^{n+1} + 2^{n+2}$veći od jedan pa mora biti $3^n - 2^n = 1$. Ako je $n \geq 2$ onda je $3^n - 2^n > 1$. Za $n = 1$ vrijedi $3^n - 2^n = 1$, a promatrani broj jednak je 17. Pa je

$$(3^n - 2^n)(3^{n+1} + 2^{n+2})$$
$(3-2)(9+8) = 1 \cdot 17.$ Zato je jedino rješenje $n = 1$.

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
ZA III RAZRED

ZADACI

1. U trouglu ABC vrijedi $\angle ABC = 2\cdot \angle BAC$. Dokazati da je $|\overline{AC}| < 2\cdot |\overline{BC}|$

2. Riješite jednačinu $\log_5 (5^{\frac{1}{x}} + 125) = \log_5 6 + 1 + \frac{1}{2x}$.

3. Ako je $\cos\alpha + \cos\beta = \frac{1}{2}$ i $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{1}{4}$, koliko je $\cos(\alpha - \beta)$?

4. Dokazati da udaljenost presječnih tačaka bilo koje tangente elipse s koordinatnim osama nije manja od zbira njenih poluosa.

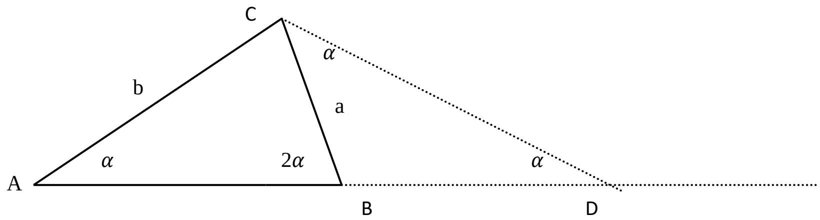
Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta.
Dozvoljena je upotreba samo pribora za crtanje i pisanje.

Mnogo uspjeha u radu!

Kakanj, 22.03.2014.godine

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
Moguća rješenja zadataka za III razred

1. Prvo rješenje: Neka je $\angle BAC$ = α i $\angle ABC$ = 2α.



Neka je D tačka na polupravoj AB takva da je $|\overline{DB}| = |\overline{BC}|$. Tada je ΔBCD jednakokraki i $\angle CDB = \angle BCD$. Kako je zbir tih uglova jednak vanjskom uglu $\angle ABC$ = 2α, slijedi

$\angle CDB = \angle BAC$ = α. Uočimo da je ΔADC jednakokraki, pa je $|\overline{CD}| = |\overline{AC}|$.

Primijenimo nejednakost trougla na ΔBCD imamo $|\overline{CD}| < |\overline{BC}| + |\overline{BD}|$; $|\overline{AC}| < 2\,|\overline{BC}|$, što je trebalo dokazati.

Drugo rješenje: Označimo $|\overline{BC}| = a$, $|\overline{AC}| = b$ i $\angle BAC$ = α te $\angle ABC$ =β. Iz sinusne teoreme vrijedi:

$b = \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot a$. Prema tvrdnji zadatka β = 2α pa vrijedi da je sinβ = sin2α = 2·sinα·cosα. Uvrštavanjem u predhodnu jednakost dobijemo $b = 2a\cdot\cos\alpha$. Budući da je cosα ≤ 1, slijedi $b \le 2a$. Nije moguće da bude $b = 2a$ jer bi u tom slučaju vrijedilo α = 90° i β = 180°.

2. D.p. $x \neq 0$

$\log_5 (5^{\frac{1}{x}}+125) = \log_5 6 + 1 + \frac{1}{2x} \Leftrightarrow \log_5 (5^{\frac{1}{x}}+125) = \log_5 6 + \log_5 5^{1+\frac{1}{2x}} \Leftrightarrow$

$(\log_5 x = 1 + \frac{1}{2x} \Leftrightarrow 5^{1+\frac{1}{2x}} = x,\ x>0)$ D.p. zadatka $x>0$

$\Leftrightarrow \log_5 (5^{\frac{1}{x}}+125) = \log_5(6\cdot 5^{1+\frac{1}{2x}}) \Leftrightarrow 5^{\frac{1}{x}}+125 = 6\cdot 5^{1+\frac{1}{2x}} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 5^{\frac{1}{x}} - 30\cdot 5^{\frac{1}{2x}} + 125 = 0.$

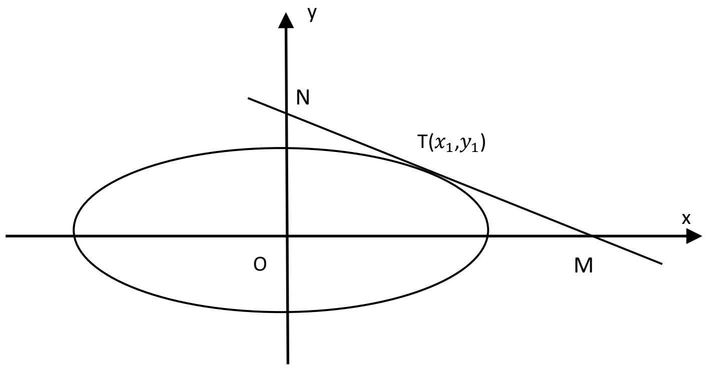
Uvedimo smjenu $5^{\frac{1}{2x}} = t$. $t^2 - 30t + 125 = 0$, ..., $t_1 = 5$, $t_2 = 25$; $5^{\frac{1}{2x}} = 5$, ..., $x_1 = \frac{1}{2}$

$5^{\frac{1}{2x}} = 25$, ..., $x_2 = \frac{1}{4}$. Dakle data jednačina ima dva rješenja koja zadovoljavaju d.p.: $x_1 = \frac{1}{2}$ i $x_2 = \frac{1}{4}$.

3. Kvadriranjem svake od jednačina: $\cos\alpha + \cos\beta = \frac{1}{2}$ i $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{1}{4}$ dobijemo
$\cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta = \frac{1}{4}$ i $\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta = \frac{1}{16}$.
Sabiranjem poslednje dvije jednakosti i primjenom trigonometrijskog identiteta dobije se :
$2 + 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = \frac{5}{16}$; ... ; $2\cos(\alpha-\beta) = \frac{-27}{16}$; ...; $\cos(\alpha-\beta) = -\frac{27}{32}$.

4. Neka je zadana elipsa $b^2 x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ i njena tangenta
   t: $b^2xx_1 + a^2yy_1 = a^2b^2$ u tački T(x_1, y_1).

Tangenta siječe koordinatne ose u tačkama M $\left(\frac{a^2}{x_1}, 0\right)$ i N$\left(0, \frac{b^2}{y_1}\right)$, a udaljenost sjecišta M i N je d = $\sqrt{\frac{a^4}{x_1^2} + \frac{b^4}{y_1^2}}$.



Pošto tačka T pripada elipsi, slijedi da je $b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2$ tj. $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$.
Sada imamo :

$$d^2 = d^2 \cdot 1 = \left(\frac{a^4}{x_1^2} + \frac{b^4}{y_1^2}\right) \cdot \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right) = a^2 + b^2 + \frac{a^4}{x_1^2} \cdot \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{b^4}{y_1^2} \cdot \frac{x_1^2}{a^2} = a^2 + b^2 +$$

$$+ ab \cdot \left(\frac{a^3y_1^2}{b^3x_1^2} + \frac{b^3x_1^2}{a^3y_1^2}\right) \geq a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$$ (jer je $\frac{u}{v} + \frac{v}{u} \geq 2 \ (u, v > 0)$) $\Rightarrow d \geq a + b$.

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
ZA IV RAZRED

ZADACI

1. Jedan je učenik na tabli napisao paran broj. Nakon toga je jednog za drugim napisao još dvanaest brojeva tako da je svaki broj za 5 veći od kvadrata predhodno napisanog broja. Odrediti kojom cifrom može završiti poslednji napisani broj.

2. Zbir trećeg i sedmog člana aritmetičkog niza je 46, a odnos (razmjera) drugog i šestog člana je 2 : 7. Koliko članova progresije daje zbir 1575.

3. Dokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi jednakost

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\cdot$$

4. Neka je *ABC* trougao u kojem je najduža stranica BC a ugao BCA tri puta veći od ugla ABC. Simetrala vanjskog ugla kod vrha A siječe pravu BC u tački A_o, a simetrala vanjskog ugla kod vrha B siječe pravu AC u tački B_o. Ako je $|AA_o|=|BB_o|$ odredi uglove datog trougla.

Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta.
Dozvoljena je upotreba samo pribora za crtanje i pisanje.

Mnogo uspjeha u radu!

Kakanj, 22.03.2014.godine

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
Moguća rješenja zadataka za IV razred

1. Prvo rješenje: Kvadrat parnog prirodnog broja završava cifrom 0, 4 ili 6. Kad takvom broju dodamo 5, zadnja cifra je 5,9 ili1. Zato drugi napisani broj na tabli završava jednom od cifara 1,5,9. Kvadrat takvog broja završava cifrom 1 ili 5, a nakon uvećanja za 5 sa 6 ili 0.Ovaj način razmišljanja možemo nastaviti i vidimo da su nakon drugog, četvrtog, šestog, osmog i desetog koraka moguće zadnje cifre 0 ili 6, a nakon trećeg, petog, sedmog, devetog i jedanaestog koraka moguće su zadnje cifre 1 ili 5. Nakon dvanaestog koraka, dobit će se broj koji završava cifrom 0 ili 6.

Drugo rješenje: Ako na početku napisani broj završava sa 0, onda će u sljedećem koraku završiti sa 5 $(0^2+5=5,$ pa onda opet sa 0 $(5^2+5=30)$ i to će se periodično ponavljati. Nakon 12 koraka broj će završiti sa 0. Ako na početku napisani broj završava sa 4 ili 6, onda će u sljedećem koraku završavati sa 1$(4^2+5=21, 6^2+5=41)$, pa onda opet sa 6$(1^2+5=6)$ a to će se takođe periodično ponavljati. Nakon 12 koraka ostat će broj koji završava sa 6.

Ako na početku napisani broj završava sa 2 ili 8, onda će u sljedećem koraku završiti 9 ($2^2 + 5 = 9$, $8^2 + 5 = 69$), pa onda sa 6 ($9^2 +5 = 86$), pa opet sa 1, 6 itd. Nakon 12 koraka opet nam ostaje broj koji završava sa 6. Dakle, na kraju se može napisati broj koji završava cifrom 0 ili 6.

2. Prema uslovu zadatka $a_3 + a_7 = (a_1 + 2d) + (a_1 + 5d) = 46$, tj. $a_1 + 4d = 23$.

$a_2 : a_6 = 2 : 7$, tj. $(a_1 + d) : (a_1 + 5d) = 2:7$, što kad se oslobodimo proporcije daje $7(a_1 + d) = 2(a_1 + 5d)$, tj. $3d = 5a_1$. Rješavanjem ovog sistema po a_1 i d dobijemo $a_1 = 3$, $d = 5$. Suma

$S_n = n \cdot 3 + \frac{(n-1)}{2} \cdot 5$ $\quad$ $1575 = 3n + \frac{(n-1)}{2} \cdot 5$ $\quad$ daje kvadratnu jednačinu $5n^2 + n - 3150 = 0$.

Rješenje ove kvadratne jednačine su $n_1 = -\frac{126}{5}$ i $n_2 = 25$. Kako broj članova niza mora biti pozitivan cio broj rješenje $n_1 = -\frac{126}{5}$ otpada, tj. potrebno je sabrati $n = 25$ članova niza da bi se dobila suma 1575.

3. Zadanu jednakost dokažimo matematičkom indukcijom. Provjerimo tvrdnju za *n*= 1

$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. Baza indukcije je zadovoljena. Pretpostavimo da zadana jednakost vrijedi za neki proizvoljan prirodan broj *n* te dokažimo da vrijedi za njegovog sljedbenika *n* + 1.

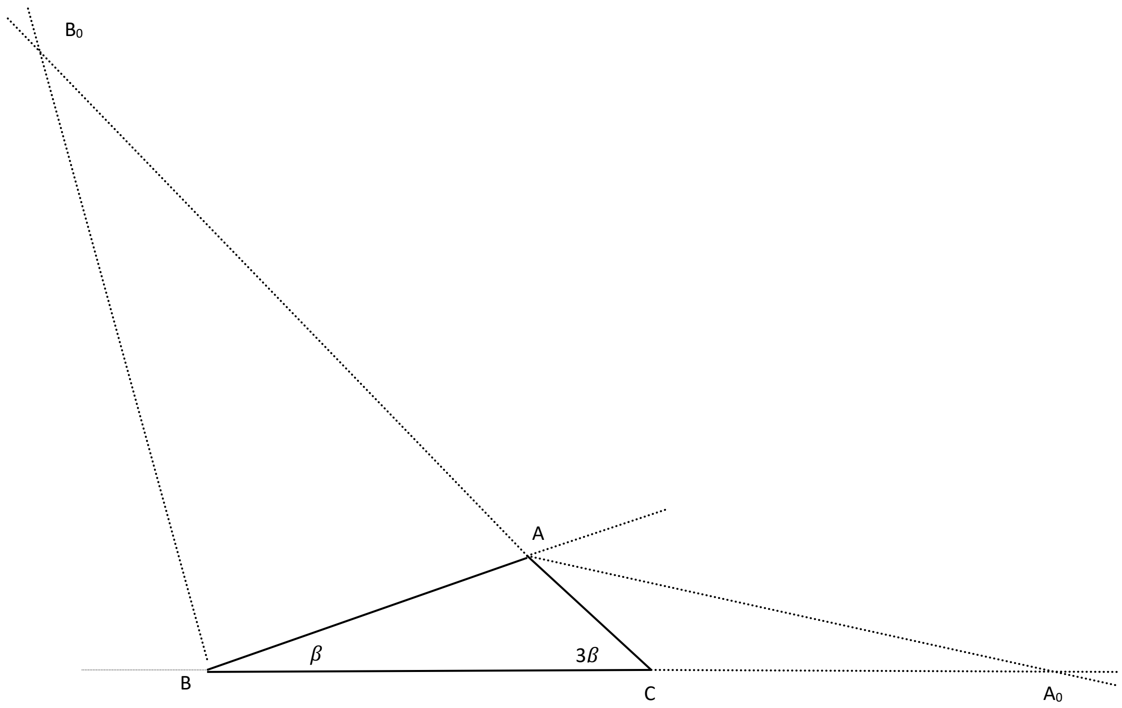
$$\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=$$

$$=\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2n+2}\right)=\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{2-1}{2(n+1)}=\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}++\frac{1}{2n+2}$$

· Time je pokazano da tvrdnja vrijedi za *n*+1, a tada i za svaki prirodan broj *n*.

4. Označimo ugao ABC =β tada je ugao BCA=3β. Ugao BAB_0 je vanjski ugao uz A pa je ugao BAB_0= 4β. Zato je ugao A_0AC = 2β. Ugao BCA je vanjski ugao trougla ACA_0 pa vrijedi

$$\angle AA_oC=\angle BCA-\angle A_oAC = 3\beta-2\beta=\beta.$$



Primjećujemo da je ΔABA_o jednakokraki jer je $\angle A_o = \angle B = \beta$.Zato vrijedi $|\overline{AB}| = |\overline{AA_o}|$. Prema uslovu zadatka $|\overline{AA_o}| = |\overline{BB_o}|$ zato je ΔABB_o jednakokraki i vrijedi $\angle BAB_o = \angle BB_oA$. Pošto je

$\angle BAB_o = 4\beta$, treći ugao tog trougla je

(*) $\angle ABB_o = 180^o - 2\angle BAB_o = 180^o - 8\beta$.

No ujedno je ugao $\angle ABB_o$ polovica vanjskog ugla uz vrh B, pa je

(**) $\angle ABB_o = 90^o - \dfrac{\beta}{2}$.

Dakle vrijedi $180^o - 8\beta = 90^o - \dfrac{\beta}{2}$, tj. $\beta = 12^o$. $\angle B = 12^o$, $\angle C = 36^o$, $\angle A = 132^o$.