ZENIČKO-DOBOJSKI KANTON
Ministarstvo za obrazovanje, nauku, kulturu i sport
Pedagoški zavod Zenica

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
ZA I RAZRED

1. Na stranicama trougla ABC konstruisani su polukrugovi čije su površine jednake: 9π, 16π, 25π. Kolika je površina trougla ABC?

(27b)

2. Neka je a cio broj. Naći sva cjelobrojna rješenja jednačine

$$3|x-1|+a|x-2|=2a+5-x.$$

(30b)

3. Neka su a i b realni brojevi za koje važi $a^3-3ab^2=8$ i $b^3-3a^2b=\sqrt{61}$. Izračunati a^2+b^2.

(18b)

4. Nacrtaj grafik funkcije $y=\frac{1}{2}(|x+1|-|x-1|)$.

(25b)

Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta.
Dozvoljena je upotreba samo pribora za crtanje i pisanje.
Rješenje svakog zadatka kratko i jasno obrazložiti.

Mnogo uspjeha u radu!

Dodatni zadatak za prvi razred:

1. Za realne brojeve a,b,c koji nisu jednaki nuli, vrijedi $a+b+c=0$. Koliko je

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}\ ?$$

ZENIČKO-DOBOJSKI KANTON
Ministarstvo za obrazovanje, nauku, kulturu i sport
Pedagoški zavod Zenica

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
ZA II RAZRED

1. Data je kvadratna jednačina po x

$$2kx^2 - 2(k^2+1)x - k^2 - 1 = 0 \quad (k \in N, x \in R).$$

Dokazati da su korijeni date jednačine uvijek iracionalni brojevi.

(28b)

2. Izračunati imaginarni dio broja $\dfrac{(1+i)^{96}}{2(1+i)^{92} + (1-i)^{90}}$.

(18b)

3. Odrediti najmanju i najveću vrijednost funkcije $f(x) = \dfrac{2x^2 - 45}{9 + x^2}$.

(24b)

4. Riješiti jednačinu: $\log_3(3^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{3}}(3^{x+2} - 9) + 3 = 0$

u skupu realnih brojeva.

(30b)

Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta.
Dozvoljena je upotreba samo pribora za crtanje i pisanje.
Rješenje svakog zadatka kratko i jasno obrazložiti.

Mnogo uspjeha u radu!

Dodatni zadaci za drugi razred:

1. Riješiti jednačinu: $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x+5}$.

2. Odrediti sve kompleksne brojeve z takve da je

$$2(1+i)z^2 - 4(2-i)z - 5 - 3i = 0 \ .$$

ZENIČKO-DOBOJSKI KANTON
Ministarstvo za obrazovanje, nauku, kulturu i sport
Pedagoški zavod Zenica

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
ZA III RAZRED

1. Ako je $\dfrac{5\cos\frac{x}{2} - 3\sin\frac{x}{2}}{3\sin\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2}} = \dfrac{15}{3}$ $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, koliko je $\operatorname{tg}\frac{x}{4}$?

(18b)

2. U trouglu ABC dužine stranica iznose: $\left|\overline{AB}\right| = 7$, $\left|\overline{BC}\right| = 8$ i $\left|\overline{AC}\right| = 9$. Tačka D nalazi se na stranici AC tako da je $\angle CBD = 45^0$. Odrediti dužinu $\left|\overline{BD}\right|$ i omjer površina trouglova ABC i DBC.

(29b)

3. Ako su x i y prirodni brojevi takvi da vrijedi: $4^{x-2} + 4^{y+2} \leq 2^{x+y+1}$. Dokazati da je zbir $2^x + 2^y$ djeljiv sa 34.

(22b)

4. Prava koja prolazi kroz koordinatni početak O siječe prave: x + y – 4 =0 i x – y - 4 = 0 redom u tačkama A i B. Odrediti geometrijsko mjesto sredina M duži AB, kad prava AB rotira oko tačke O.

(31b)

Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta.
Dozvoljena je upotreba samo pribora za crtanje i pisanje.
Rješenje svakog zadatka kratko i jasno obrazložiti.

Mnogo uspjeha u radu!

Dodatni zadaci za treći razred:

1. Ako su kraci trapeza međusobno normalni , dokazati da zbir kvadrata dužine njegovih dijagonala jednak zbiru kvadrata dužina njegovih paralelnih stranica.

ZENIČKO-DOBOJSKI KANTON
Ministarstvo za obrazovanje, nauku, kulturu i sport
Pedagoški zavod Zenica

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
ZA IV RAZRED

1. Komad papira ima oblik jednakostraničnog trougla ABC, $d(\overline{AB}) = 15$.Tačku A prevalimo u tačku D na BC za koju je $d(\overline{BD}) = 3$. Papir spljoštimo i time nastaje pregib EF, gdje je E na AB, F na AC.Kolika je dužina tog pregiba?

(22b)

2. Suma prvih n članova jednog niza data je izrazom: $S_n = 9{,}5n^2 - 89{,}5n$.

a) Dokazati da je taj niz aritmetički;
b) U tom nizu postoji jedan član koji je jednak dvostrukoj sumi svih predhodnih članova. Naći taj član.

(27b)

3. Matematičkom indukcijom dokazati da je broj $5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1}$ djeljiv sa 59 za svaki prirodan broj n.

(20)

4. U krug je upisan trapez, kome je veća osnova prečnik datog kruga. Odrediti uglove trapeza tako da površina trapeza bude najveća.

(31b)

Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta.
Dozvoljena je upotreba samo pribora za crtanje i pisanje.
Rješenje svakog zadatka kratko i jasno obrazložiti.

Mnogo uspjeha u radu!

Dodatni zadatak za četvrti razred:

1. Neka je $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$ realna funkcija jedne realne promjenljive. Dokazati da ona nema vrijednosti između $\dfrac{1}{4}$ i 1.

ZENIČKO-DOBOJSKI KANTON
Ministarstvo za obrazovanje, nauku, kulturu i sport
Pedagoški zavod Zenica

Moguća rješenja za I razred:

1. Vrijedi sljedeće: $P_1 = 9\pi \Rightarrow \frac{r_1^2 \cdot \pi}{2} = 9\pi \Rightarrow r_1 = 3 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow a = 6\sqrt{2}$ (5b)

$P_2 = 16\pi \Rightarrow \frac{r_2^2 \cdot \pi}{2} = 16\pi \Rightarrow r_2 = 4 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow b = 8\sqrt{2}$ (5b)

$P_3 = 25\pi \Rightarrow \frac{r_3^2 \cdot \pi}{2} = 25\pi \Rightarrow r_3 = 5 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow c = 10\sqrt{2}$ (5b)

Iz Heronove formule slijedi: $s = \frac{a+b+c}{2} = 12\sqrt{2}$ (3b),

$P = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} = ... = \sqrt{2304} = 48 kv.jed.$ (9b)

Napomena:Ako se uoči da je trougao pravougli imamo:
$a^2 + b^2 = 72 + 128 = 200 = (10\sqrt{2})^2 = c^2$

Površinu možemo izračunati po formuli $P = \frac{a \cdot b}{2} = ... = 48 kv.jed.$ (27b)

2. Imamo: $|x-1|$ = { x-1 za x ≥1; - (x-1) za x <1} a $|x-2|$ = { x-2 za x ≥2; - (x-2), x <2}

Razlikujemo sljedeće slučajeve:

Prvi slučaj: $x<1$

$\Rightarrow -3(x-1) - a(x-2) = 2a + 5 - x \Leftrightarrow -3x + 3 - ax + 2a = 2a + 5 - x \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x = -\frac{2}{a+2}; (a \neq -2)$

$\Rightarrow a+2|2 \Rightarrow a+2 \in \{1,-1,2,-2\} \Rightarrow a \in \{-1,-3,0,-4\} \Rightarrow x \in \{-2,2,-1,1\}$ tj. $x \in \{-2,-1\}$ zbog uslova $x<1$. (15b)

Drugi slučaj:

$x \in [1,2) \Rightarrow 3(x-1) - a(x-2) = 2a + 5 - x \Leftrightarrow 3x - 3 - ax + 2a = 2a + 5 - x \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x = -\frac{8}{a-4}; (a \neq 4)$

$\Rightarrow a-4|8 \Rightarrow a-4 \in \{1,-1,2,-2,4,-4,8,-8\} \Rightarrow a \in \{5,3,6,2,8,0,12,-4\} \Rightarrow x \in \{-8,8,-4,4-2,2,-1,1\}$

Tj. $x=1$ zbog uslova $x \in [1,2)$ (7b)

Treći slučaj: $x \in [2,+\infty) \Rightarrow 3(x-1) + a(x-2) = 2a + 5 - x \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x(a+4) = 4(a+4) - 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 4 - \frac{8}{a+4}; (a \neq -4) \Rightarrow a+4|8 \Rightarrow a+4 \in \{1,-1,2,-2,4,-4,8,-8\} \Rightarrow a \in \{-3,-5,-2,-6,0,-8,4,-12\}$

onda je tj. $x \in \{-4,12,0,8,2,6,3,5\}$ tj. $x \in \{2,3,5,6,8,12\}$ zbog $x \in [2,+\infty)$. (7b)

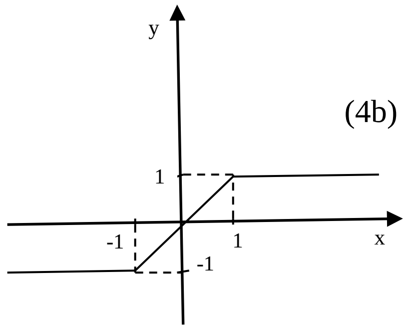
Iz ova tri slučaja imamo ukupno devet rješenja $x \in \{-2,-1,1,2,3,5,6,8,12\}$. (1b) (30b)

3. $(a^2+b^2)^3 = a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 + b^6 - 6a^2b^4 + 9a^4b^2$

$= (a^3 - 3ab^2)^2 + (b^3 - 3a^2b)^2$ (10b) Odnosno imamo $(a^2+b^2)^3 = 8^2 + (\sqrt{61})^2 = 64 + 61 = 125$

$(a^2+b^2)^3 = 125 \Rightarrow a^2 + b^2 = 5.$ (8b) (18b)

4. Uzimajući u obzir definiciju $|x-1|$ i $|x+1|$ (6b) imamo da je y = -1 za x < -1 (5b); y= x za -1≤ x ≤ 1 (5b); y = 1 za x > 1 (5b).



(4b)

(25b)

Dodatni zadatak za prvi razred:

2. Za realne brojeve a,b,c koji nisu jednaki nuli, vrijedi $a+b+c=0$. Koliko je $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}$?

Rješenje: Ako je $a+b+c=0$, onda je $c=-(a+b)$. Dati izraz svedimo na zajednički nazivnik i uvrstimo $c=-(a+b)$. Dobijamo: $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}=$

$$=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=\frac{a^3+b^3-(a+b)^3}{-ab(a+b)}=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)-(a+b)^3}{-ab(a+b)}=\ldots=\frac{-3ab}{-ab}=3.$$

ZENIČKO-DOBOJSKI KANTON
Ministarstvo za obrazovanje, nauku, kulturu i sport
Pedagoški zavod Zenica

Moguća rješenja za II razred:

1. $D = b^2 - 4ac(5b) \Rightarrow D = \left[-2(k^2+1)\right]^2 - 4\cdot 2k\cdot(-k^2-1) \Rightarrow D = 4(k^2+1)\cdot(k^2+1+2k) \Rightarrow$
$\Rightarrow D = 4\cdot(k^2+1)\cdot(k+1)^2(5b),$

te je $\sqrt{D} = 2\cdot(k+1)\cdot\sqrt{k^2+1}.$ (2b). Slijedi ako je $\sqrt{D}\in Q \Rightarrow \sqrt{k^2+1}\in N(3b) \Rightarrow k^2+1 = p^2,$

$(p\in N)(5b) \Rightarrow p^2 - k^2 = 1 \Rightarrow (p-k)(p+k) = 1 \Rightarrow \{p-k=1; p+k=1\} \Rightarrow p=1, k=0 \notin N(6b)$

Dakle $\sqrt{D}\notin Q \Rightarrow x_1, x_2$ su iracionalni brojevi (2b). (28b)

2. $i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, ..., i^{45} = i, i^{48} = 1, ...$ (5b)

$(1+i)^2 = 2i; (1-i)^2 = -2i$

$$\frac{(1+i)^{96}}{2(1+i)^{92}+(1-i)^{90}} = \frac{(2i)^{48}}{2(2i)^{46}+(-2i)^{45}} = \frac{2^{48}}{2\cdot 2^{46}\cdot(-1) - 2^{45}\cdot i} = -\frac{2^{48}}{2^{47}+2^{45}\cdot i} = -$$

$$\frac{2^3}{2^2+i}\cdot\frac{4-i}{4+i} = -\frac{8\cdot(4-i)}{16+1} = \frac{8i-32}{17}$$ (10b). Imaginarni dio zadanog kompleksnog broja je $\frac{8}{17}$ (3b)

(18b)

3. $f(x) = \frac{2x^2-45}{9+x^2} = \frac{2x^2+18}{9+x^2} - \frac{63}{9+x^2} = 2 - \frac{63}{9+x^2}; x\in R$. $f(x)$ =2-$\frac{63}{9+x^2}$. Sada zaključujemo

da će najmanja vrijednost funkcije $f(x)$ biti ako razlomak $\frac{63}{9+x^2}$ bude najveći, a on će biti najveći ako je

$9+x^2$ najmanji, odnosno kada je x^2 najmanje a to je za $x=0$. Dakle imamo $f(0) = \frac{2\cdot 0^2 - 45}{9+0^2} = -5$, tj.

$f(x) = f(0) = -5$ (16b)

Najveću vrijednost će funkcija imati, oko je razlomak $\frac{63}{9+x^2}$ najmanji, a on će biti najmanji ako je $9+x^2$

najmanje, odnosno kad je x^2 najveće, međutim u ovom slučaju x

teži ka beskonačnosti , a $f(x)$ ka 2, ali nikada neće biti 2 jer bi tada trebalo da bude $\frac{63}{9+x^2} = 0$, a to je nemoguće

zbog toga što je $\frac{63}{9+x^2} > 0$ $\forall x\in R$. Ovo zapravo znači da funkcija $f(x)$ nema maksimuma , tj. $-5 \le f(x) < 2$ (8b).

(24b)

4. Budući da je u skupu realnih brojeva logaritamska funkcija definisana za pozitivne vrijednosti argumenta, to je $3^x - 1 > 0$ i $3^{x+2} - 9 > 0$ (4b). Ovdje je $3^x > 1$, pa je $x > 0$ (2b). Dakle rješenje jednačine tražimo u intervalu $(0, +\infty)$ (2b).

Kako je $\log_{\frac{1}{3}} a = -\log_3 a$ (2b), to datu jednačinu možemo napisati u obliku:

$-\log_3(3^x-1)\cdot\log_3 9\cdot(3^x-1) + 3 = 0$ (3b). Uvedimo smjenu $\log_3(3^x-1) = y$ (2b) pa je

$-y\cdot(2+y) + 3 = 0$, tj. $(y+1)^2 = 4$ (3b) Njena rješenja su :

$y_1 = -3$ i $y_2 = 1$ (4b). Dakle, $3^x - 1 = 3^{y_1}$ i $3^x - 1 = 3^{y_2}$ (2b). Dakle $3^x = \frac{28}{27}$ i $3^x = 4$ (2b) Logaritmiranjem po bazi 3, nalazimo da je $x_1 = \log_3 \frac{28}{27}$ i $x_2 = \log_3 4$ (2b). Oba ova rješenja nalaze se u intervalu $(0,\infty)$ (2b)

Dodatni zadaci za drugi razred:

1. Riješiti jednačinu: $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+5}$.

Rješenje: Posebno ćemo riješiti oduzimanje na lijevoj , posebno na desnoj strani jednačine.
Definiciono područje za ovu jednačinu je $x \notin \{-5,-3,-2,0\}$

$$\frac{x+3-x}{x(x+3)} = \frac{x+5-x-2}{(x+2)(x+5)} \quad ; \quad \frac{3}{x^2+3x} = \frac{3}{x^2+7x+10} \ .$$

Jednaki razlomci, jednaki brojnici, dakle moraju biti i nazivnici jednaki:

$$x^2 + 3x = x^2 + 7x + 10; x = -2{,}5$$

Provjera: lijeva strana -2,4 i desna strana -2,4.

2. Odrediti sve kompleksne brojeve z takve da je

$$2(1+i)z^2 - 4(2-i)z - 5 - 3i = 0 \ .$$

Rješenje: Rješavanjem kvadratne jednačine po z nalazimo:

$$z_{1,2} = \frac{4(2-i) \pm \sqrt{16(2-i)^2 + 4\cdot 2\cdot(1+i)\cdot(5+3i)}}{4\cdot(1+i)}$$, odakle je

$$z_1 = \frac{4-i}{1+i} = \frac{3-5i}{2} \quad ; \quad z_2 = \frac{-i}{1+i} = -\frac{1+i}{2}$$

ZENIČKO-DOBOJSKI KANTON
Ministarstvo za obrazovanje, nauku, kulturu i sport
Pedagoški zavod Zenica

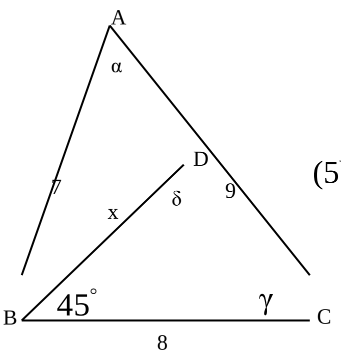
Moguća rješenja za III razred:

1. Podijelimo li brojnik i nazivnik s $\cos\frac{x}{2}$ dobijemo: $\dfrac{5-3tg\frac{x}{2}}{3tg\frac{x}{2}+2}=\dfrac{15}{3}$ (7b) ,

odavde slijedi $tg\frac{x}{2}=\frac{-5}{18}$ (3b).

$x\in(0,\frac{\pi}{2})$, prema tome vrijednost $tg\frac{x}{2}$ mora biti pozitivna. Zaključak je da se na ovom intervalu $tg\frac{x}{4}$ ne može izračunati. (8b) (18b)

2. Neka je $\gamma=\angle BCA$, $\delta=\angle BDC$ i $x=\left|\overline{BD}\right|$ (3b). Prema kosinusnoj teoremi vrijedi:



(5b)

$$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\Rightarrow\cos\gamma=\frac{2}{3}\ \text{(4b)}$$

$$\sin\gamma=\sqrt{1-\cos^2\gamma}=\frac{\sqrt{5}}{3}\ \text{(3b).}$$

Prema th. o sinusu vrijedi:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma};\ \text{(2b)}$$

$$\frac{x}{\sin\gamma}=\frac{a}{\sin\delta}\Rightarrow\frac{x}{\sin\gamma}=\frac{8}{\sin\delta}\Rightarrow x=\frac{8\sin\gamma}{\sin\delta}=\frac{8\sin\gamma}{\sin(180^0-(45^0+\gamma))}=\frac{8\sin\gamma}{\sin(45^0+\gamma)}=$$

$$=\frac{8\sin\gamma}{\sin45^0\cdot\cos\gamma+\cos45^0\cdot\sin\gamma},\ x=\frac{8\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{8\sqrt{10}}{2+\sqrt{5}}=8\sqrt{10}(\sqrt{5}-2)\ \text{(7b)}$$

Omjer površina je $\dfrac{P(ABC)}{P(DBC)}=\dfrac{8\cdot9\cdot\sin\gamma}{x\cdot8\cdot\sin45°}=...=\dfrac{3(\sqrt{5}+2)}{8}$ (5b)

(29)

3. Imamo:

$4^{x-2}+4^{y+2}\le2^{x+y+1}\Leftrightarrow\left(2^{x-2}\right)^2-2\cdot2^{x-2}\cdot2^{y+2}+\left(2^{y+2}\right)^2\le0\Leftrightarrow\left(2^{x-2}-2^{y+2}\right)^2\le0$ (7b).

Odavde slijedi da mora biti: $2^{x-2}-2^{y+2}=0$ $\{$ jer je $(2^{x-2}-2^{y+2})^2\ge0$ za $\forall x,y\in N$ $\}$(5b)

$\Rightarrow 2^{x-2} = 2^{y+2} \Rightarrow x-2 = y+2 \Rightarrow x = y+4$ (4b). Sada je :

$2^x + 2^y = 2^{y+4} + 2^y = 2^y(2^4+1) = 17\cdot 2^y = 34\cdot 2^{y-1} \Rightarrow 34 \mid 2^x + 2^y$. (6b)

(22b)

4. Prava y = kx, $|k| \neq 1$, siječe date prave u tačkama A$\left(\frac{4}{1+k}, \frac{4k}{1+k}\right)$(5b) i B $\left(\frac{4}{1-k}, \frac{4k}{1-k}\right)$(5b).

Koordinate tačke M su: M$\left(\frac{\frac{4}{1+k}+\frac{4}{1-k}}{2}, \frac{\frac{4k}{1+k}+\frac{4k}{1-k}}{2}\right)$, odnosno M$\left(\frac{4}{1-k^2}, \frac{4k}{1-k^2}\right)$(3b)

Dakle $x = \frac{4}{1-k^2} \wedge y = \frac{4k}{1-k^2}$ (2b) odakle eliminacijom parametra k dobijemo:

$(1-k^2 = \frac{4}{x} \wedge 1-k^2 = \frac{4k}{y}) \Rightarrow \frac{4}{x} = \frac{4k}{y} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{k}{y} \Rightarrow k = \frac{y}{x}$ (5b) pa zamjenom $1-k^2 = \frac{4}{x}$ dobijamo

$1-\frac{y^2}{x^2} = \frac{4}{x} \Rightarrow x^2 - y^2 = 4x$ (5b), što znači da je geometrijsko mjesto tačaka M hiperbola, čija je jednačina oblika: $\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$ i glasi $\frac{(x-2)^2}{2^2} - \frac{(y-0)^2}{2^2} = 1$ (6b)

(31b)

Dodatni zadaci za treći razred:

1. Ako su kraci trapeza međusobno normalni , dokazati da zbir kvadrata dužine njegovih dijagonala jednak zbiru kvadrata dužina njegovih paralelnih stranica.

Rješenje: Neka je AD $\perp BC$,i neka je AD $\cap BC = \{O\}$. Po Pitagorinoj teoremi dobijemo iz pravouglog trougla AOC i BOD: $\overline{AC}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{CO}^2$ i $\overline{BD}^2 = \overline{BO}^2 + \overline{DO}^2$. Sabiranjem dobijemo: $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{CO}^2 + \overline{BO}^2 + \overline{DO}^2 = (\overline{AO}^2 + \overline{BO}^2) + (\overline{CO}^2 + \overline{DO}^2)$. Kako po Pitagorinoj teoremi iz pravouglih trouglova AOB i DOC: $\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2$ i $\overline{DC}^2 = \overline{DO}^2 + \overline{CO}^2$ to dobijemo $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{DC}^2$, što je i trebalo dokazati.

2. Odrediti koordinate tačke A koja je simetrična tački B(5,-2) u odnosu na pravu

3x-2y-6=0.

Rješenje:

Neka je p data prava i B data tačka Podnožje S normale na p je središte duži AB, gdje je A tražena tačka. Koeficijent pravca date prave p je (y=$\frac{3}{2}x-3$) $k=\frac{3}{2}$,

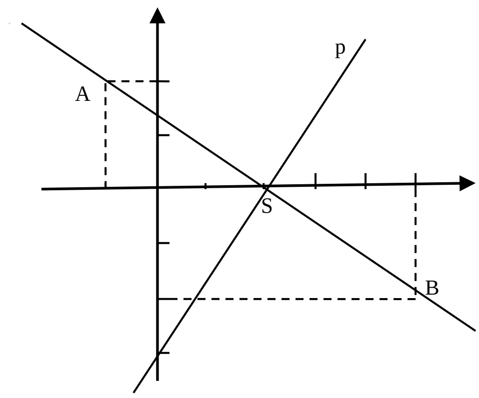
pa je koeficijent pravca normale $k_1=-\frac{2}{3}$.

Dakle, prava n ima jednačinu

y = $-\frac{2}{3}x+b$. Zamjenom koordinata tačke B

u ovu jednačinu dobijemo: -2 = $-\frac{2}{3}5+b$, $b=\frac{4}{3}$,

pa jednačina prave n glasi: y = -$\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$.



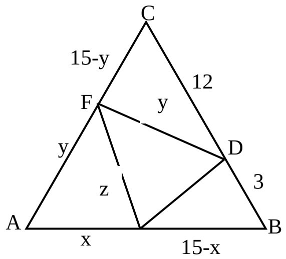
Rješavanjem sistema jednačina pravih p i n dobijemo koordinate tačke S, dakle S(2,0). Kako je S središte duži AB, koordinate x i y tačke A odredićemo iz uslova:

$\frac{x+5}{2}=2;\frac{y-2}{2}=0$. Tako dobijemo: x= -1 i y = 2, tj. A(-1,2).

ZENIČKO-DOBOJSKI KANTON
Ministarstvo za obrazovanje, nauku, kulturu i sport
Pedagoški zavod Zenica

Moguća rješenja za IV razred:

1. Nacrtati sliku. Prvo ćemo iz trougla CDFnaći vrijednost y koristeći kosinusnu teoremu:



(4b)

$$y^2 = (15-y)^2 + 12^2 - 2\cdot 12\cdot(15-y)\cdot\cos 60^0,$$

Dakle y = 10,5 (6b). Zatim u trouglu BED
Nalazimo da je:

$$x^2 = (15-x)^2 + 3^2 - 2\cdot 3\cdot(15-x)\cdot\cos 60^0$$

x=7 (6b). Konačno i u trouglu DEF primjenom iste th.
nađemo da je $z \approx 9{,}26$ (6b)

(22b)

2. a) Prvi član niza jednak je $a_1 = S_1 = 9{,}5 - 89{,}5 = -80$ (2b), a za n-ti član n>1imamo:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 9{,}5n^2 - 89{,}5n - \left[9{,}5(n-1)^2 - 89{,}5(n-1)\right] = 19n - 99 = -80 + (n-1)\cdot 19 \text{ (8b)}$$

Što je upravo izraz za n-ti član aritmetičkog niza s prvim članom $a_1 = -80$ i $d = 19$ (2b). Ovim je dokaz pod a) završen.

b) Neka je traženi član a_k. Tada po uslovu zadatka vrijedi: $a_k = 2\cdot S_{k-1}$ (4b).

$$-80 + 19\cdot(k-1) = 2\cdot\left[9{,}5\cdot(k-1)^2 - 89{,}5\cdot(k-1)\right]$$

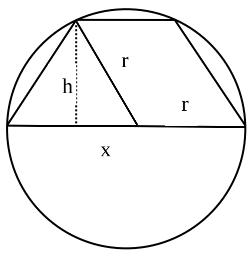
$19k^2 - 236k + 297 = 0$ (6b); $k_1 = 11$ i $k_2 = \dfrac{27}{19}$ (2b), pošto k mora biti cio broj zadovoljava samo $k_1 = 11$ (2b). Dakle u zadanom nizu postoji član sa traženim svojstvom: $a_{11} = 110$ (1b).

(27b)

3. Dokaz ćemo provesti metodom matematičke indukcije. Neka je f(n) = $5^{n+2} + 26\cdot 5^n + 8^{2n+1}$. Tada je
f(1) = $5^3 + 26\cdot 5 + 8^3$; f(1) = 767 ; f(1) = 13 · 59 (8b).
Dalje je f(n+1) = $5^{n+3} + 26\cdot 5^{n+1} + 8^{2n+3}$ =
= 5 · $5^{n+2} + 26\cdot 5\cdot 5^n + 64\cdot 8^{2n+1}$ = $5\cdot 5^{n+2} + 26\cdot 5\cdot 5^n + 5\cdot 8^{2n+1} + 59\cdot 8^{2n+1}$ =
= 5 · f(n) + $59\cdot 8^{2n+1}$ (8b).
Dakle ako je broj f(n) djeljiv sa 59 biće i broj f(n+1) djeljiv sa 59 (4b). (20b)

4. Neka je r poluprečnik kruga i 2x manja osnovica trapeza. Tada je h = $\sqrt{r^2 - x^2}$ (5b), pa je P=(r + x)h = = (r+h) $\sqrt{r^2 - x^2}$ (4b). Odavde je P' = $\dfrac{-2x^2 - rx + r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ (8b), 0 < x < r (3b). Površina je maksimalna za $x = \dfrac{r}{2}$, pa je trougao

AOD jednakostraničan. Uglovi trapeza su 60^0 i 120^0 (6b).



(5b) (31b)

Dodatni zadatak za četvrti razred:

1. Neka je $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$ realna funkcija jedne realne promjenljive. Dokazati da ona nema vrijednosti između $\dfrac{1}{4}$ i 1.

Rješenje: Imamo $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$ $(x \neq \pm 2) \Rightarrow y(x^2 - 4) = x^2 - 1 \Rightarrow (y-1) \cdot x^2 - 4y + 1 = 0$ $(y \neq 1)$
$\Rightarrow x^2 = \dfrac{4y-1}{y-1}$. Mora biti (zbog $x^2 \geq 0, x \neq \pm 2)$ da je $\dfrac{4y-1}{y-1} \geq 0 \Rightarrow y \in \left(-\infty, \dfrac{1}{4}\right] \cup (1, +\infty)$

Što znači da funkcija ne uzima vrijednosti između $\dfrac{1}{4}$ i 1.