Zeničko-dobojski kanton
Ministarstvo za obrazovanje, nauku, kulturu i sport
Pedagoški zavod Zenica

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE ZA I RAZRED

1. Neka su u skupu cijelih brojeva definisane operacije Δ i $\circ$ na ovaj način:

$$\Delta: \left(\forall x, y \in Z\right) \quad x\Delta y = 5x - 3y + 2$$
$$\circ: \left(\forall x, y \in Z\right) \quad x \circ y = 4x + 2y - 5.$$

Riješiti po x jednačinu: $\left(3\Delta x\right)\circ 2 = 2\circ y$, gdje je y rješenje jednačine $(3\circ y)\Delta y = 9.$

(23b)

2. Za koje vrijednosti realnog broja p jednačina $3-\frac{x-p}{2}=x$ ima cjelobrojna rješenja po x koja zadovoljavaju uslov $|x|<2$?

(28b)

3. Simetrala ugla $\angle BAC = \alpha$ trougla ABC siječe stranicu BC u tački D. Konstruisana je prava p koja sadrži tačku D i koja siječe stranicu AB u tački E tako da je $\angle BDE = \angle BAC$. Dokazati da je $\overline{CD} \cong \overline{DE}$.

(25b)

4. Nacrtaj grafik funkcije y=$\frac{\left(x-2\right)\cdot\left(x-1\right)}{\left|x-2\right|}, x \neq 2$

(24b)

Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta.
Dozvoljena je upotreba samo pribora za crtanje i pisanje.
Rješenje svakog zadatka kratko i jasno obrazložiti.

Mnogo uspjeha u radu!

Zeničko-dobojski kanton
Ministarstvo za obrazovanje, nauku, kulturu i sport
Pedagoški zavod Zenica

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE ZA II RAZRED

1. Odredite sve kompleksne brojeve z tako da je
$$2(1+i)z^2-4(2-i)z-5-3i=0.$$

(22b)

2. Dokažite: 1° Od svih pravouglih trouglova zadane hipotenuze c, najveću površinu ima jednakokraki pravougli trougao.
2° Od svih pravougaonika upisanih datoj kružnici poluprečnika r, najveću površinu ima kvadrat.

(29b)

3. Riješite datu jednačinu $\sqrt{12-\frac{12}{x^2}}-x^2+\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}}=0, x\neq 0$.

(prilikom rješavanja zadatka može vam zatrebati vrijednost $\sqrt[4]{12}$ koja je približno jednaka 1,86)

(30b)

4. Dokažite:
$$a^{-n}\left(a^n-1\right)^{-1}-2\left(a^{2n}-1\right)^{-1}+a^{-n}\left(a^n+1\right)^{-1}=0,\ a\neq 0$$

(19b)

Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta.
Dozvoljena je upotreba samo pribora za crtanje i pisanje.
Rješenje svakog zadatka kratko i jasno obrazložiti.

Mnogo uspjeha u radu!

Zeničko-dobojski kanton
Ministarstvo za obrazovanje, nauku, kulturu i sport
Pedagoški zavod Zenica

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE ZA III RAZRED

1. Ako težišne linije koje odgovaraju katetama pravouglog trougla obrazuju oštar ugao φ tada je površina tog trougla $P = \frac{1}{3} c^2 \operatorname{tg}\varphi$, gdje je c njegova hipotenuza.

(21b)

2. Riješite jednačinu:
$$9\log_{\sin 2x}(4\cos^2 x) + 8\log_{2\cos x} \sin x = 16.$$

(31b)

3. Tačke u kojima elipsa $x^2 + 4y^2 = 25$ siječe ose koordinatnog sistema, vrhovi su romba. Naći jednačinu kružnice upisane u taj romb i koordinate tačke u kojoj kružnica dodiruje stranicu romba u prvom kvadrantu.

(29b)

4. Nađite sva realna rješenja jednačine
$$5x^2 + y^2 - 2xy - 8y + 20 = 0.$$

(19b)

Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta.
Dozvoljena je upotreba samo pribora za crtanje i pisanje.
Rješenje svakog zadatka kratko i jasno obrazložiti.

Mnogo uspjeha u radu!

Zeničko-dobojski kanton
Ministarstvo za obrazovanje, nauku, kulturu i sport
Pedagoški zavod Zenica

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE ZA IV RAZRED

1. Neka je $\{a_n\}_{n\geq 1}$ aritmetički niz, dokažite da za $\forall\ m,n,p \in N$ važi:

$$a_m(n-p)+a_n(p-m)+a_p(m-n)=0.$$

(24b)

2. Neka za sve realne brojeve x, y važi:

$$f(xy)=f(x)\cdot f(y) \quad \text{i} \quad f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy.$$

Odredite f(x).

(26b)

3. Matematičkom indukcijom dokažite:

$$(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx, \quad \forall n \in \mathrm{N}$$

(20b)

4. Izračunati: $A=\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{8}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}$.

(30b)

Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta.
Dozvoljena je upotreba samo pribora za crtanje i pisanje.
Rješenje svakog zadatka kratko i jasno obrazložiti.

Mnogo uspjeha u radu!

Zeničko-dobojski kanton
Ministarstvo za obrazovanje, nauku, kulturu i sport
Pedagoški zavod Zenica

Moguća rješenja za I razred:

1. Izrsčunajmo prvo $(3 \circ y)\Delta y = 9$ koristeći definiciju operacija Δ i $\circ$ pa imamo:

$$(3 \circ y)\Delta y = (4\cdot 3 + 2y - 5)\Delta y = (7+2y)\Delta y = 5\cdot(7+2y) - 3y + 2 = 37 + 7y \ \textbf{(7b)}$$

Kako je $(3 \circ y)\Delta y = 9$ imamo $37 + 7y = 9$, odakle je $y = -4 \in Z$ (**3b**).

Rješavajmo sada jednačinu $(3\Delta x)\circ 2 = 2\circ y$, koristeći definiciju operacija Δ i $\circ$.

$(3\Delta x)\circ 2 = (5\cdot 3 - 3x + 2)\circ 2 = (17 - 3x)\circ 2 = 4\cdot(17-3x) + 2\cdot 2 - 5 = 67 - 12x$ (**7b**), i

$2\circ y = 4\cdot 2 + 2y - 5 = 3 + 2\cdot(-4) = -5$ (**3b**).

$(3\Delta x)\circ 2 = 2\circ y \Rightarrow 67 - 12x = -5,\ 12x = 72,\ x = 6$ (**3b**).

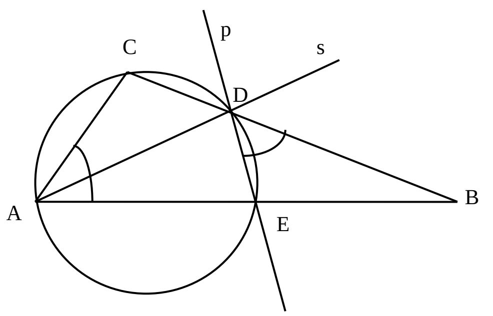
(23b)

2. Riješimo jednačinu: $3 - \frac{x-p}{2} = x$ po x.

$3 - \frac{x-p}{2} = x /2 \Rightarrow 6 - (x-p) = 2x \Rightarrow ... \Rightarrow x = 2 + \frac{p}{3}$ (**10b**). Po uslovu zadatka x mora biti cijeli broj i zadovoljavati uslav da je $|x|$<2 tj. (-2< x <2) (**6b**). Znači, da prema ovim uslovima x može biti: -1, 0 ili 1 (**6b**). Pošto je $x = 2 + \frac{p}{3}$, p može biti : -3, -6 ili -9 (**6b**).

(28b)

3. Kako je ($\angle BDE + \angle EDC = 180^\circ \quad \wedge \quad \angle CAE + \angle EDC = 180^\circ$) (**6b**)$\Rightarrow$da je □AEDC tetivni pa se oko njega može opisati kružnica (**6**b). Prema uslovu zadatka periferijski $\angle CAD$ i $\angle DAE$ su jednaki pa su i pripadne tetive jednake (**8b**).

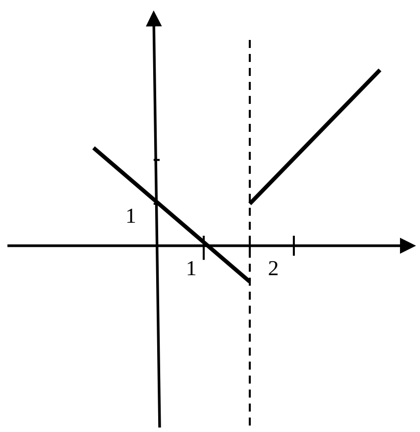


(**5b**)

(25b)

4. $|x-2| = \begin{cases} x-2, & x > 2 \\ 0, & x=2 \\ -(x-2), & x<2 \end{cases}$ (**3b**)

Za x > 2 , data f-ja je y = x-1 (**5b**)
Za x=2, f-ja nije definisana (**3b**)
Za x<2, data f-ja je y = 1-x (**5b**)



(**8**b)

(24b)

Zeničko-dobojski kanton
Ministarstvo za obrazovanje, nauku, kulturu i sport
Pedagoški zavod Zenica

Moguća rješenja za II razred:

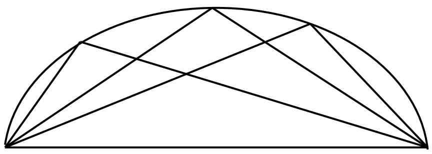
1. Rješavanjem kvadratne jednačine po z nalazimo:

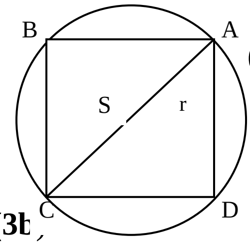
$$z_{1,2}=\frac{4(2-i)\pm\sqrt{16(2-i)^2+4\cdot 2\cdot(1+i)\cdot(5+3i)}}{4\cdot(1+i)}$$ (**12b**), odakle je

$$z_1=\frac{-i-1}{1+i}=-\frac{1+i}{2}$$ (**5**b) i $$z_2=\frac{4-i}{1+i}=...=\frac{3-5i}{2}$$ (**5**b). (22b)

2. Dokažimo prvo pod **1°** Po Talesovoj teoremi vrhovi svih pravouglih trouglova zadane hipotenuze c leže na polukružnici prečnika c (**3b**). Kako je baza svih tih trouglova zajednička (hipotenuza c) imat će najveću površinu onaj od njih koji ima najveću visinu (**3b**). Najveću površinu imat će dakle onaj trougao kojem je vrh u najvišoj tački polukružnice, a to je (vidi sliku)

(**3b**)





(**3b**)

jednakokraki pravougli trougao(**3b**).Površina mu je $P_{\max}=\frac{1}{4}c^2$(k.j.)(**3b**)

2° Kao što vidimo iz slike površina P pravougaonika ABCD jednaka je dvostrukoj površini pravouglog trougla ABC hipotenuze 2r(**3**b). P će biti najveći onda kad i odgovarajući trougao ABC bude imao maksimalnu površinu (u 1° smo vidjeli da će to i biti u slučaju $|AB|=|BC|$)

(**3b**). No, tada pravougaonik postaje kvadrat (**2b**).Površina mu je $P_{\max}=2\frac{2r\cdot r}{2}=2r^2$(k.j.) **(3b)**.

(29b)

3. $$\sqrt{12-\frac{12}{x^2}-x^2}+\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}}=0, x\neq 0$$

D.p. $12-\frac{12}{x^2}\geq 0 \ \wedge \ x^2-\frac{12}{x^2}\geq 0$

$$12-\frac{12}{x^2}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{12(x^2-1)}{x^2}\geq 0 \Leftrightarrow x^2-1\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$$ (**5b**)

$$x^2-\frac{12}{x^2}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^4-12}{x^2}\geq 0 \Leftrightarrow x^4-12\geq 0 \Leftrightarrow |x|\geq\sqrt[4]{12} \Leftrightarrow x\leq-\sqrt[4]{12}\vee x\geq\sqrt[4]{12}$$ (**5b**)

Presjecanjem ova dva skupa rješenja dobijamo da se u definicionom području nalaze

$$x \le -\sqrt[4]{12} \vee x \ge \sqrt[4]{12} \quad (\mathbf{2b})$$

Data j-na nakon smjene $x^2 = t$ ekvivalentna je sa j-nom

$$\sqrt{12-\frac{12}{t}-t}+\sqrt{t-\frac{12}{t}}=0, t\ne 0 \quad \Leftrightarrow \sqrt{12-\frac{12}{t}}=t-\sqrt{t-\frac{12}{t}}$$

Nakon kvadriranja, sređivanja i dijeljenja dobivene ekvivalentne j-ne sa t imamo

$$\frac{12}{t}=t-2\sqrt{t-\frac{12}{t}}+1 \Leftrightarrow t-\frac{12}{t}-2\sqrt{t-\frac{12}{t}}+1=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{t-\frac{12}{t}}-1\right)^2=0 \Leftrightarrow \sqrt{t-\frac{12}{t}}=1$$

$$\Leftrightarrow t-\frac{12}{t}=1 \Leftrightarrow t^2-t-12=0 \Leftrightarrow t_1=-3 \wedge t_2=4\,(\mathbf{14b}) \qquad (30b)$$

Tako da je x = -2 $\vee$ x = 2 čime je zadovoljeno i definiciono područje (**4**b).

4. $a^{-n}\left(a^n-1\right)^{-1}-2\left(a^{2n}-1\right)^{-1^{1}}+a^{-n}\left(a^n+1\right)^{-1}=0$, $a\ne 0$

$$\frac{1}{a^n}\cdot\frac{1}{a^n-1}-2\cdot\frac{1}{a^{2n}-1}+\frac{1}{a^n}\cdot\frac{1}{a^n+1}=0 \Rightarrow \frac{a^n+1-2a^n+a^n-1}{a^n\cdot\left(a^n-1\right)\cdot\left(a^n+1\right)}=0 \Rightarrow \frac{2a^n-2a^n}{a^n\cdot\left(a^n-1\right)\cdot\left(a^n+1\right)}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{0}{a^n\cdot\left(a^n-1\right)\cdot\left(a^n+1\right)}=0$$

(15b)

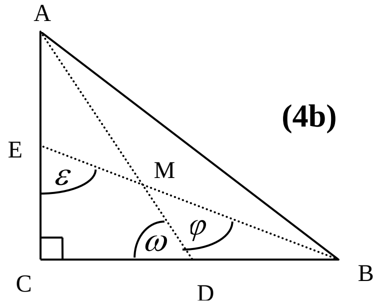
Kako je po uslovu zadatka $a\ne 0$ to izraz u nazivniku nije nula, pa je vrijednost ovog razlomka nula. (**4b**)

(19b)

Zeničko-dobojski kanton
Ministarstvo za obrazovanje, nauku, kulturu i sport
Pedagoški zavod Zenica

Moguća rješenja za III razred:

1. Neka su D i E polovišta kateta BC i AC redom i neka je AD $\cap$ BE=$\{M\}$. Posmatrajmo četverougao CDME i neka je $\angle$ MEC = ε i $\angle$ MDC = ω.Tako dobijamo



$\varepsilon+\omega+90^0+\angle EMD = 360^0$

$\varepsilon+\omega=270^0 - \angle EMD$

$\varepsilon+\omega=270^0-(180^0-\varphi)$ **(4b)**

$\varepsilon+\omega=90^0+\varphi$ **(4b)**

S druge strane vrijedi da je

$$\text{tg}\varphi = -\text{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) = -\text{ctg}(\varepsilon+\omega) = \frac{tg\varepsilon\cdot tg\omega-1}{tg\varepsilon+tg\omega} \quad (*) \quad \textbf{(3b)}$$

Posmatrajmo pravougle trouglove Δ CBE i Δ CDA , imamo da je: { $tg\varepsilon=\frac{a}{\frac{1}{2}b}=\frac{2a}{b}$; $tg\omega=\frac{b}{\frac{1}{2}a}=\frac{2b}{a}$;

Odatle je $tg\varepsilon\cdot tg\omega=\frac{2a}{b}\cdot\frac{2b}{a}=4$; $tg\varepsilon+tg\omega=\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a}=\frac{2(a^2+b^2)}{ab}=\frac{2c^2}{ab}$ }(**) **(4b)**

Pošto je $P=\frac{ab}{2}\Rightarrow 2P=ab$ **(2b)**

Iz (*) i (**) dobijemo $tg\varphi=\frac{4-1}{\frac{2c^2}{ab}}=\frac{3ab}{2c^2}=\frac{3\cdot 2P}{2c^2}=\frac{3P}{c^2}\Rightarrow c^2\cdot tg\varphi=3P\Rightarrow P=\frac{c^2tg\varphi}{3}$ **(4b)**.

(21b)

2. Primjenjujući pravila logaritmovanja jednačina $9\log_{\sin 2x}(4\cos^2 x)+8\log_{2\cos x}\sin x=16$

uz uslov da je sinx > 0, cosx > 0, cosx $\neq \frac{1}{2}$ i sin2x$\neq 1$ (**4b**), postaje $18\log_{2\sin x\cos x}(2\cos x)+8\log_{2\cos x}\sin x=16$

Primijenimo formulu $\left(\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}\right)$ na prvi sabirak navedene j-ne. Za naš slučaj dobijemo

$$\log_{2\sin x\cos x}(2\cos x)=\frac{\log_{2\cos x}2\cos x}{\log_{2\cos x}2\sin x\cos x}=\frac{1}{\log_{2\cos x}\cos x+\log_{2\cos x}\sin x}=\frac{1}{1+\log_{2\cos x}\sin x} \quad \textbf{(5b)};$$

$18\frac{1}{1+\log_{2\cos x}\sin x}+8\log_{2\cos x}\sin x=16$. Uvedimo smjenu $t=\log_{2\cos x}\sin x$ (**1b**) i doći ćemo do jednačine

$$18\frac{1}{1+t}+8t=16\Rightarrow 9\frac{1}{1+t}+4t=8\Rightarrow ...\Rightarrow 4t^2-4t+1=0\Rightarrow ...\Rightarrow t_1=t_2=\frac{1}{2} \quad \textbf{(8b)}$$

$t = \log_{2\cos x} \sin x \Rightarrow \log_{2\cos x} \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (2\cos x)^{\frac{1}{2}} = \sin x \Leftrightarrow 2\cos x = \sin^2 x \Leftrightarrow \cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow$

$(\cos x)_{1/2} = -1 \pm \sqrt{2}$

Kako je -1≤ cosx ≤ 1 jedino ima smisla cosx = -1+ $\sqrt{2}$ što daje dvije serije rješenja

$x = \arccos(-1+\sqrt{2}) + 2k\pi, k \in Z$ i $x = -\arccos(-1+\sqrt{2}) + 2k\pi, k \in Z$. Zbog uslova zadatka sinx > 0 dobijemo da su rješenja $x = \arccos(-1+\sqrt{2}) + 2k\pi, k \in Z$ (**13b**)

. (31b)

3. Transformišimo jednačinu elipse $x^2 + 4y^2 = 25$ u $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{\frac{25}{4}} = 1$, odakle je $a = 5; b = \frac{5}{2}$ (**3b**).

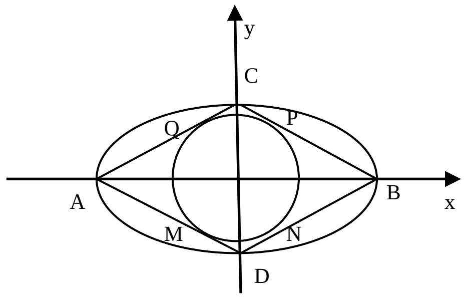
Tačke presjeka elipse i koordinatnih osa su: B(5,0); C(0, $\frac{5}{2}$); A(-5,0); D(0, -$\frac{5}{2}$) (**4b**).

Nađimo jednačinu prave kroz tačke B i C.

Ona glasi $y - 0 = \frac{\frac{5}{2} - 0}{0 - 5}(x - 5) \Rightarrow ... \Rightarrow y = -\frac{1}{2}(x - 5) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \Rightarrow k = -\frac{1}{2}; n = \frac{5}{2}$ (**3b**).

Uslov da prava bude tangenta na kružnicu dat je jednakošću

$r^2 \cdot (k^2 + 1) = n^2$.



$r^2 \cdot (k^2 + 1) = n^2 \Rightarrow r^2 = \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1} \Rightarrow ... \Rightarrow r^2 = 5$ (**6b**)

Pošto je kružnica sa centrom u koordinatnom početku
to njena jednačina glasi: $x^2 + y^2 = 5$ (**2b**).

Rješavanjem sistema jednačina (**3b**)

$x^2 + y^2 = 5$ i $x + 2y = 5$ dobijemo koordinate tačke P(1,2) (**8b**).

(**29b**)

4. Iz date jednačine $5x^2 + y^2 - 2xy - 8y + 20 = 0$ imamo $5x^2 - 2yx + (y^2 - 8y + 20) = 0$

$$x_{1,2} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4 \cdot 5(y^2 - 8y + 20)}}{2 \cdot 5} = ... = \frac{y \pm \sqrt{-4y^2 + 40y - 100}}{5}.\ (\mathbf{9b})$$

$x_{1,2} \in R \Leftrightarrow -4(y^2 - 10y + 25) \geq 0 \Leftrightarrow -4(y-5)^2 \geq 0$, ovo je istinito samo ako je $y = 5$. Kako je radikand jednak nuli to je $x_{1,2} = \frac{y}{5} \Rightarrow x = 1$. Dakle, jedino realno rješenje je $(x, y) = (1,5)$ (**10b**).

(**19b**)

Zeničko-dobojski kanton
Ministarstvo za obrazovanje, nauku, kulturu i sport
Pedagoški zavod Zenica

Moguća rješenja za IV razred:

1. Neka je $a = a_1$ početni član, a $d = a_2 - a_1$ diferencija aritmetičkog niza. Tada je: $a_m = a + (m-1)d$, $a_n = a + (n-1)d$ i $a_p = a + (p-1)d$ (10b). Označimo sa L traženi izraz

$L = a_m(n-p) + a_n(p-m) + a_p(m-n)$ pa je

$$L = [a + (m-1)d](n-p) + [a + (n-1)d](p-m) + [a + (p-1)d](m-n) =$$
$$= a(n-p) + (m-1)d(n-p) + a(p-m) + (n-1)d(p-m) + a(m-n) + (p-1)d(m-n) =$$
$$= an - ap + md(n-p) - d(n-p) + ap - am + nd(p-m) - d(p-m) + am - an + pd(m-n) -$$
$$- d(m-n) = an - ap + mnd - mpd - nd + pd + ap - am + npd - mnd - pd + md + am - an +$$
$$+ mpd - npd - md + nd$$

Pošto svaki član ima svoj suprotan to je vrijednost ovog izraza jednaka nuli, što se i tražilo (14b).

(24b)

2. Korištenjem datih jednakosti dobijemo:

1° $f(x+0) = f(x) + f(0) + 0 \Rightarrow f(x) = f(x) + f(0) \Rightarrow 0 = f(0)$ (6b)

2° $0 = f(0) = f[1 + (-1)] = f(1) + f(-1) - 2 \Rightarrow f(1) + f(-1) = 2$ (5b)

Dalje je

$$0 = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) + 2x(-x) = f(x \cdot 1) + f(x \cdot (-1)) - 2x^2 =$$
$$= f(x) \cdot f(1) + f(x) \cdot f(-1) - 2x^2 = f(x) \cdot [f(1) + f(-1)] - 2x^2 = f(x) \cdot 2 - 2x^2$$ (11b)

Znači imamo $0 = 2f(x) - 2x^2 \Rightarrow f(x) = \frac{2x^2}{2} \Rightarrow f(x) = x^2$ (4b).

(26b)

3. $(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx, \ \forall n \in \mathrm{N}$

Za n=1 $(\cos x + i\sin x)^1 = \cos x + i\sin x$, pa jednakost važi (3b)

Pretpostavimo da je data jednakost tačna za n=k, tj. pretpostavimo da važi

$$(\cos x + i\sin x)^k = \cos kx + i\sin kx$$ (3b)

Dokažimo da je tačna za n=k+1, tj. da je

$$(\cos x + i\sin x)^{k+1} = \cos(k+1)x + i\sin(k+1)x$$ (5b)

Pođimo od pretpostavke

$$(\cos x + i\sin x)^k = \cos kx + i\sin kx \quad / \cdot (\cos x + i\sin x)$$ (2b)

$$(\cos x + i\sin x)^{k+1} = (\cos kx + i\sin kx) \cdot (\cos x + i\sin x)$$ (2b)

$$(\cos x + i\sin x)^{k+1} = \cos kx\cos x + i\cos kx\sin x + i\sin kx\cos x + i^2\sin kx\sin x =$$

=coskx cosx-sinkx sinx +i(coskx sinx+sinkx cosx)=cos(kx+x)+i sin(kx+x)=
=cos x(k+1) + i sin x(k+1) , što je i trebalo dokazati

Na osnovu principa matematičke indukcije zaključujemo da naša jednakost važi za $\forall n \in \mathrm{N}$ (5b)

(20b)

4. Kako je $2\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}=\sin x\Rightarrow\cos\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}$ (5b) , pa analogno dobijemo

za $\cos\frac{x}{4}\ je:\sin 2\frac{x}{4}=2\cos\frac{x}{4}\sin\frac{x}{4}=...\Rightarrow\cos\frac{x}{4}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2^2}}(5b);\ \cos\frac{x}{8}=\frac{\sin\frac{x}{2^2}}{2\sin\frac{x}{2^3}}(5b)$,...

$$\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{x}{2^n}}(5b)$$

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2^2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2^2}}{2\sin\frac{x}{2^3}}\cdot\ldots\cdot\frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{x}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\cdot\sin\frac{x}{2^n}}=$$

$$=\lim\frac{\sin x}{x\cdot\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}}=\left[smjena:\frac{x}{2^n}=t,n\to\infty\Rightarrow t\to 0\right]=\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\frac{1}{\frac{\sin t}{t}}=\frac{\sin x}{x}$$

(10b)

(30b)

Zeničko-dobojski kanton
Ministarstvo za obrazovanje, nauku, kulturu i sport
Pedagoški zavod Zenica

DODATNI ZADACI

Dodatni zadatak za prvi razred:

1. Data je funkcija $f(x) = 2x - 1$. Odrediti realne brojeve x i y tako da je $f(f(x)) = 0$ i $f(f(y)) = y$.

Dodatni zadatak za drugi razred:

1. Riješiti jednačinu: $\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}$

Dodatni zadatak za treći razred:

1. Izračunati površinu trougla koji obrazuju simetrale prvog i drugog kvadranta i tangenta na hiperbolu $x^2 - y^2 = 5$ u tački M (3, 2).

Dodatni zadatak za četvrti razred:

1. Neka je $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$ realna funkcija jedne realne promjenljive. Dokazati da ona nema vrijednosti između $\dfrac{1}{4}$ i 1.