Zeničko-dobojski kanton
Ministarstvo za obrazovanje, nauku, kulturu i sport
Pedagoški zavod Zenica

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
ZA I RAZRED

1. Tri cijevi pune bazen. Sama prva cijev napuni ga za 8 sati, druga za 12 sati, a treća za 15 sati. Za koje će se vrijeme bazen napuniti ako su otvorene sve tri cijevi?

(24b)

2. Uprostiti izraz $\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{b}{ax}}$, ako je $x=a+b-\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$

(22b)

3. U jednakokrakom trouglu ABC ugao pri vrhu C je 108^0. Na kraku BC data je tačka E, tako da prava AE polovi ugao BAC. Ako je duž CD visina ovog trougla, dokazati da je AE = 2CD.

(28b)

4. Ako je n prirodan broj dokazati da je izraz n^5-5n^3+4n djeljiv sa 120.

(26b)

Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta.

Dozvoljena je upotreba samo pribora za crtanje i pisanje.
Rješenje svakog zadatka kratko i jasno obrazložiti.

Mnogo uspjeha u radu!

Maglaj, 10.3.2018. godine

Zeničko-dobojski kanton
Ministarstvo za obrazovanje, nauku, kulturu i sport
Pedagoški zavod Zenica

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
ZA II RAZRED

1. Ako je $f(n)=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n, n\in N$ tada je $f(n+4)=-f(n)$.

(21b)

2. Neka je četverougao ABCD kvadrat sa dužinom stranice od 1cm, a tačke $M\in AB, N\in BC, P\in CD, Q\in DA$. Dokazati da je obim četverougla $MNPQ$ veći ili jednak od $2\sqrt{2}$. (29b)

3. Uglovi na većoj osnovici trapeza su po 60^0, a njegov obim iznosi 200 cm. Kolika mora biti osnovica trapeza da bi njegova površina bila maksimalna.

(30b)

4. Dokazati da vrijednost izraza
$$\frac{\sqrt{\frac{abc+4}{a}-\frac{4\sqrt{bc}}{\sqrt{a}}}}{\sqrt{abc}-2},\quad a>0,b>0,c>0,abc<4,$$ ne zavisi od b i c.

(20b)

Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta.

Dozvoljena je upotreba samo pribora za crtanje i pisanje.
Rješenje svakog zadatka kratko i jasno obrazložiti.

Mnogo uspjeha u radu!

Maglaj, 10.3.2018. godine

Zeničko-dobojski kanton
Ministarstvo za obrazovanje, nauku, kulturu i sport
Pedagoški zavod Zenica

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
ZA III RAZRED

1. Prava p dodiruje kružnicu upisanu u jednakostranični trougao ABC i siječe stranice AB i AC u tačkama D i E. Dokazati da tada vrijedi jednakost $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}+\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}=1$. (26b)

2. Izračunati površinu trougla koji obrazuju simetrale prvog i drugog kvadranta i tangenta na hiperbolu $x^2-y^2=5$ u tački M (3, 2). (29b)

3. Dokazati identitet $n=-\log_3\log_3\underbrace{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\ldots\sqrt[3]{3}}}}_{\text{n puta}}$ (20b)

4. Dokazati jednakost $tg9°-tg27°-tg63°+tg81°=4$ (25b)

Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta.
Dozvoljena je upotreba samo pribora za crtanje i pisanje.
Rješenje svakog zadatka kratko i jasno obrazložiti.

Mnogo uspjeha u radu!

Maglaj, 10.3.2018. godine

Zeničko-dobojski kanton
Ministarstvo za obrazovanje, nauku, kulturu i sport
Pedagoški zavod Zenica

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
ZA IV RAZRED

1. Broj $2^{n+2}\cdot 3^{n}+5n-4$ djeljiv sa 25 za svaki prirodan broj n. Dokazati.
   (Dokaz izvesti matematičkom indukcijom)

   (26b)

2. Neka je a_k opšti član, a S_k zbir prvih k članova nekog aritmetičkog niza. Ako za neke m i n, gdje je $m \neq n$, važi $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}$, dokazati da je $\frac{a_m}{a_n}=\frac{2m-1}{2n-1}$.

   (25b)

3. Funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zadovoljava uslov $f\left(x^2+f(y)\right)=y+(f(x))^2$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$
   a) Dokazati da je f injektivna funkcija
   b) Dokazati da je f neparna funkcija

   (21b)

4. Dokazati da u trouglu važi nejednakost
   $$(h_a-2r)(h_b-2r)(h_c-2r)\leq r^3$$
   gdje su h_a ,h_b , h_c visine, a r poluprečnik upisanog kruga u trougao.

   (28b)

Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta.

Dozvoljena je upotreba samo pribora za crtanje i pisanje.
Rješenje svakog zadatka kratko i jasno obrazložiti.

Mnogo uspjeha u radu!

Maglaj, 10.3.2018. godine

Zeničko-dobojski kanton
Ministarstvo za obrazovanje, nauku, kulturu i sport
Pedagoški zavod Zenica

Moguća rješenja zadataka za I razred

1. Za jedan sat prva cijev napuni $\frac{1}{8}$ bazena(2b), druga $\frac{1}{12}$(2b) a treća $\frac{1}{15}$bazena(2b). Sve tri cijevi za jedan sat napune $\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}$ bazena(3b). Ako se bazen sa tri otvorene cijevi puni za x sati tada vrijedi: 1 sat $\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}$bazena, a za
x sati 1 bazen. Napišimo proporciju
x : 1 = 1: $\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}\right)$ (5b) tj.

$$x\cdot\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}\right)=1/120 \ \ldots \qquad x=\frac{40}{11} \text{ sati (5b).}$$

$$x=\frac{40}{11}\text{ h}=3{,}6363\text{h}=\ \frac{218{,}1818}{60}\text{ h}=\ 3\ \frac{38{,}1818}{60}\text{ h}=3\left(\frac{38}{60}+\frac{0{,}1818}{60}\right)\text{ h}=3\text{h}$$

$$38\text{min}\frac{0{,}1818}{60}3600\text{s}\approx 3\text{h } 38\text{min } 11\text{s (5b).}$$

(24b)

2. Kako je $x=a+b-\frac{a^2+b^2}{a+b}\Leftrightarrow$

$$x=\frac{(a+b)(a+b)-a^2-b^2}{a+b}\Leftrightarrow x=\frac{a^2+2ab+b^2-a^2-b^2}{a+b}\Leftrightarrow x=\frac{2ab}{a+b}\text{ (5b) def. pod.}$$

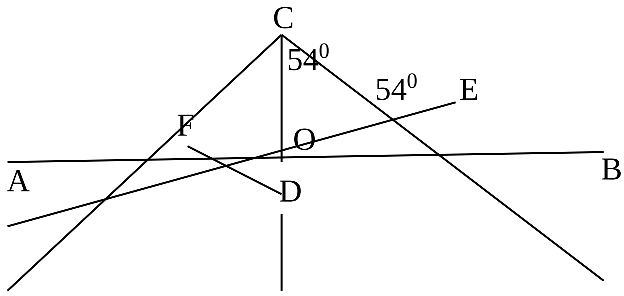
$x\neq 0,\ a\neq 0, a\neq -b$ (2b)

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{\frac{2ab}{a+b}}\Leftrightarrow\frac{1}{x}=\frac{a+b}{2ab}\text{ (2b) novi uslov } b\neq 0\text{ (1b), }\frac{b}{ax}=\frac{b}{a\cdot\frac{2ab}{a+b}}=\ldots=\frac{a+b}{2a^2}(4b)$$

$$\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}-\frac{b}{ax}}=\frac{\frac{a+b}{2ab}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}-\frac{a+b}{2a^2}}=\frac{\frac{a+b-2b}{2ab}}{\frac{2a-a-b}{2a^2}}=\frac{\frac{a-b}{b}}{\frac{a-b}{a}}=\frac{a(a-b)}{b(a-b)}=\frac{a}{b}\text{(8b).}$$

(22b)

3.



(3b)

Neka AE siječe DC u tački O (slika). Ugao α trougla ABC je 36^0 (jer je $2\alpha=180^0 - 108^0$)(2b). Zbog toga polovina ugla BAC, tj. Ugao CAE iznosi 18^0(1b). Koristeći dva poznata ugla u trouglu ACE, to su uglovi 108^0 i 18^0, izračunamo ugao AEC = $180^0 - 108^0 - 18^0 = 54^0$ (1b). Kako znamo, duž CD polovi stranicu AB (1b) i dati ugao ACE(1b), pa je ugao BCD jednak 54^0 (1b). Dakle, trougao OCE je jednakokraki (2b), pa je OC = OE(1b). Neka je F središte duži AE (2b). Kako je D središte duži AB, to je duž DF srednja linija ABE (2b) pa je paralelna sa BE(1b). Zbog toga su uglovi kod tjemena F i D u trouglu ODF jednaki uglovima kod tjemena E i C u trouglu OCE (kao naizmjenični)(2b). Dakle, i trougao ODF je jednakokraki (1b) pa je OD = OF(1b). Sada imamo CO = OE i OD = OF(2b), odakle je
CO + OD = OE + OF (1b) odnosno CD = EF(1b). Kako je AE = 2EF to je i AE =2CD(2b).

(28b)

4. $n^5 - 5n^3 + 4n \stackrel{(2b)}{=} n\left(n^4 - 5n^2 + 4\right) \stackrel{(3b)}{=} n\left(n^4 - n^2 - 4n^2 + 4\right) \stackrel{(5b)}{=} n\left[n^2\left(n^2 - 1\right) - 4\left(n^2 - 1\right)\right] \stackrel{(3b)}{=}$

$$= n\left(n^2 - 1\right)\left(n^2 - 4\right) \stackrel{(3b)}{=} n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2) \stackrel{(3b)}{=} (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) \ (*)$$

Izraz (*) je proizvod pet uzastopnih prirodnih brojeva. Među tim brojevima uvijek se nalazi bar jedan koji je djeljiv sa 2, bar jedan djeljiv sa 3, bar jedan djeljiv sa 4 i jedan djeljiv sa 5 (5b). Zato je proizvod $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ djeljiv sa $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ (2b). (26b)

Moguća rješenja zadataka za II razred

1. $f(n+4) = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{n+4} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{n+4} = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{n} \cdot \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{n} \cdot \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4} = (*)$

(5b)

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{(1+i)^4}{\left(\sqrt{2}\right)^4} = \frac{\left(1+2i+i^2\right)^2}{4} = \frac{(2i)^2}{4} = -1$$

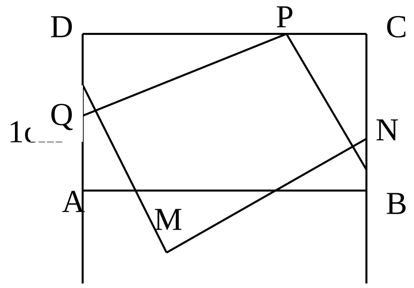
(5b)

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{(1-i)^4}{\left(\sqrt{2}\right)^4} = \frac{\left(1-2i+i^2\right)^2}{4} = \frac{(-2i)^2}{4} = -1$$

(5b)

$(*)=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n(-1)+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n(-1)=-1\left[\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n\right]=-f(n)$ (4b). Znači, pokazali smo da je $f(n+4)=-f(n)$ (2b). (21b)

2.



(3b)

Iz pravouglih trouglova AMQ, BMN, CPN i DPQ na osnovu Pitagorine teoreme je: $\overline{MN}+\overline{NP}+\overline{PQ}+\overline{MQ}=\sqrt{\overline{BM}^2+\overline{BN}^2}+\sqrt{\overline{CN}^2+\overline{CP}^2}+\sqrt{\overline{DP}^2+\overline{DQ}^2}+\sqrt{\overline{AQ}^2+\overline{MN}^2}$ (8b)
odnosno na osnovu nejednakosti između aritmetičke (A_n) i kvadratne (K_n) sredine imamo:

$$(K_n=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}} \quad ; \quad A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \quad ; \; G\le A\le H\le K$$

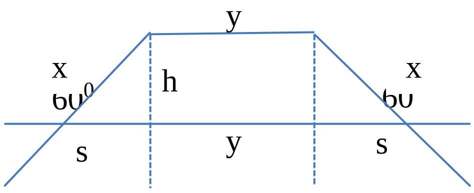
$$\frac{\overline{BM}+\overline{BN}}{2}\le\sqrt{\frac{\overline{BM}^2+\overline{BN}^2}{2}} \; , \ldots)$$

$$\overline{MN}+\overline{NP}+\overline{PQ}+\overline{QM}\ge\sqrt{2}\frac{\overline{BM}+\overline{BN}}{2}+\sqrt{2}\frac{\overline{CN}+\overline{CP}}{2}+\sqrt{2}\frac{\overline{DP}+\overline{DQ}}{2}+\sqrt{2}\frac{\overline{QA}+\overline{AM}}{2}$$ (8b)

a odavde $O_{MNPQ}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{AM}+\overline{BM}+\overline{BN}+\overline{CN}+\overline{CP}+\overline{DP}+\overline{DQ}+\overline{QA})$ (2b)

$O_{MNPQ}\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}\right)$ (2b) ; $O_{MNPQ}\ge\frac{\sqrt{2}}{2}(1+1+1+1)$ (2b) ; $O_{MNPQ}\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 4$ (2b) ;
$O_{MNPQ}\ge 2\sqrt{2}$ (2b). (29b)

3. Neka je manja osnovica trapeza y i krak x.



(3b)

Tada je $\cos 60^0=\frac{s}{x}\Rightarrow s=\frac{1}{2}\cdot x$ (2b). Veća osnovica je $\frac{1}{2}x+y+\frac{1}{2}x=x+y$ (2b);
$O=x+x+y+x+y$ (2b)

$O=3x+2y$; $O=200$ (1b)$\Rightarrow 3x+2y=200(2b)\Rightarrow y=\frac{200-3x}{2}=100-\frac{3}{2}x(1b)$.

$P=\frac{x+y+y}{2}\cdot h$, $h=\sin 60^0\cdot x\Rightarrow h=\frac{\sqrt{3}x}{2}$ (2b) ; $P=\frac{x+2y}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}x}{2}\Rightarrow P=\frac{\sqrt{3}x^2+2xy\sqrt{3}}{4}=\cdot$

$=...=\frac{-2\sqrt{3}x^2+200\sqrt{3}x}{4}=-\frac{1}{2}\sqrt{3}x^2+50\sqrt{3}x$ (3b) Kako je a<0, $T_{\max}\left(-\frac{b}{2a},-\frac{D}{4a}\right)$ (3b)

$x_{\max}=-\frac{b}{2a}=\frac{-50\sqrt{3}}{-2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}}=\frac{50\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=50$ (3b)

$y_{\max}=\frac{-D}{4a}=-\frac{(b^2-4ac)}{4a}=...=\frac{3750}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=1250\sqrt{3}$

(3b). Površina ima maksimalnu vrijednost $P_{\max}=1250\sqrt{3}$ za x=50 (2b) Tada je veća osnovica trapeza
y + x = 75 cm (1b). (30b)

4. $$\frac{\sqrt{\frac{abc+4}{a}-\frac{4\sqrt{bc}}{\sqrt{a}}}}{\sqrt{abc}-2}=\frac{\sqrt{\frac{abc+4-4\sqrt{abc}}{a}}}{\sqrt{abc}-2}=\frac{\sqrt{(\sqrt{abc}-2)^2}}{\sqrt{a}\left(\sqrt{abc}-2\right)}=\frac{2-\sqrt{abc}}{\sqrt{a}\left(\sqrt{abc}-2\right)}=-\frac{1}{\sqrt{a}}$$

(17b).
Kako se u vrijednost izraza ne nalazi b,c to je tvrdnja dokazana (3b) (20b)

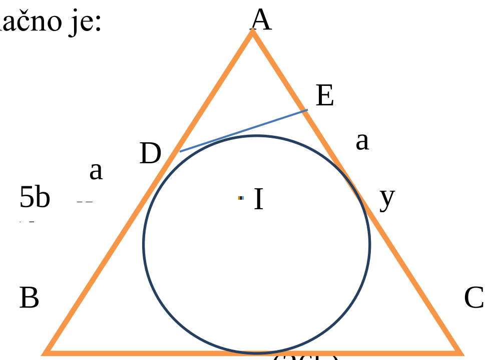
Moguća rješenja zadataka za III razred

1. Tangenta DE dijeli jednakostranični trougao ABC na jedan tangentni četverougao BCED i manji trougao ADE (slika). Neka je $\overline{BD}=x,\overline{CE}=y,\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}=a$ (2b). Po teoremi o tangetnom četverouglu slijedi: $\overline{DE}+a=x+y\Rightarrow\overline{DE}=x+y-a$. (*) (2b)

Primjenom kosinusne teoreme na trougao ADE kako je trougao jednakostranični,dobijemo:
$\overline{DE}^2=\overline{AD}^2+\overline{AE}^2-2\overline{AD}\cdot\overline{AE}\cdot\cos 60^0$ (2b) tj.
$\overline{DE}^2=(a-x)^2+(a-y)^2-2(a-x)(a-y)\cdot\frac{1}{2}$ (3b) , tj. $\overline{DE}^2=a^2-a(x+y)+x^2+y^2-xy$ (3b)pa

na osnovu (*) slijedi $a=\frac{3xy}{x+y}$ (**) (4b). Zbog (**) konačno je:

$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}+\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}=\frac{a-x}{x}+\frac{a-y}{y}=a\frac{x+y}{xy}-2=3-2=1$ (5b)
Što je i trebalo dokazati.



(26b)

2. Jednačine simetrala prvog i drugog kvadranta su: y = x i y = - x (3b), a tangenta na datu hiperbolu u tački M(3,2) je 3x - 2y = 5 (10b). Tjemena datog trougla su presjeci datih pravih. Presjek prve dvije prave je tačka A(0,0) (3b). Presjek B(x,y) prve i treće prave zadovoljava
y = x i 3x – 2y = 5, pa je x = y = 5. Odnosno B(5,5) (3b). Presjek C(x,y) druge i treće prave zadovoljava y= - x i 3x – 2y = 5 pa je x = 1, y = -1 ; C(1,-1) (3b). Primijetimo da je trougao pravougli jer je $\angle CAB = 90^\circ$ (3b). Površina tog pravouglog trougla
$P = \frac{1}{2}\overline{BA}\cdot\overline{CA} = \frac{1}{2}\cdot 5\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 5$, P=5 kv.jedinica (4b) (29b)

3. $-\log_3\log_3\underbrace{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\ldots\sqrt[3]{3}}}}_{\text{n puta}} = -\log_3\log_3 3^{3^{-n}}\,(5b) = -\log_3\left(\frac{1}{3^n}\log_3 3\right)(5b) =$
$-\log_3 3^{-n}(5b) = -(-n) = n(5b)$

(20b)

Što je trebalo i dokazati.

4. Koristeći formulu $tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\,\cos\beta}$ (3b) dobijamo

$$tg9^\circ - tg27^\circ - tg63^\circ + tg81^\circ = tg9^\circ + tg81^\circ - (tg27^\circ + tg63^\circ)\,(2b) =$$
$$= \frac{\sin(9^\circ+81^\circ)}{\cos9^\circ\cos81^\circ} - \frac{\sin(27^\circ+63^\circ)}{\cos27^\circ\cos63^\circ}(4b) = \frac{1}{\cos9^\circ\sin9^\circ} - \frac{1}{\cos27^\circ\sin27^\circ}(4b) =$$
$$= \frac{2}{\sin18^\circ} - \frac{2}{\sin54^\circ}(2b) = \frac{2(\sin54^\circ - \sin18^\circ)}{\sin18^\circ\sin54^\circ}\,(2b) =$$
$$= \frac{2\cdot 2\cos\frac{54^\circ+18^\circ}{2}\sin\frac{54^\circ-18^\circ}{2}}{\sin18^\circ\sin54^\circ}(2b) = \frac{4\cos\frac{72^\circ}{2}\sin\frac{36^\circ}{2}}{\sin18^\circ\sin54^\circ}(2b) =$$
$$= \frac{4\cos36^\circ\sin18^\circ}{\sin18^\circ\sin54^\circ}\,(2b) = \frac{4\sin54^\circ}{\sin54^\circ} = 4(2b)$$

(25b)

Moguća rješenja zadataka za IV razred

1. Označimo sa $a_n = 2^{n+2}\cdot 3^n + 5n - 4$ (3b). Dokaz ćemo izvesti matematičkom indukcijom po n (3b). Za $n=1$ je $a_1 = 2^3\cdot 3 + 5\cdot 1 - 4$ =25, znači da je djeljivo sa 25 (3b). Predpostavimo da je broj a_n djeljiv sa 25 (3b) Dokažimo da je a_{n+1} djeljiv sa 25 (3b) Tada imamo da je:
$a_{n+1} = 2^{n+3}\cdot 3^{n+1} + 5(n+1) - 4 = 6\cdot 2^{n+2}\cdot 3^n + 5n + 1 = 6\cdot\left(2^{n+2}\cdot 3^n + 5n - 4 - 5n + 4\right) + 5n + 1 =$
$= 6\cdot(a_n - 5n + 4) + 5n + 1 = 6\cdot a_n - 25n + 25$, pa je broj a_{n+1} djeljiv sa 25 (11b).

(26b)

2. Iz uslova zadatka slijedi $\frac{m^2}{n^2}=\frac{S_m}{S_n}=\frac{\frac{1}{2}m(a_1+a_m)}{\frac{1}{2}n(a_1+a_n)}=\frac{m(2a_1+(m-1)d)}{n(2a_1+(n-1)d)}$ (8b)

Odavde dobijemo $2ma_1+m(n-1)d=2na_1+n(m-1)d$ i $m(2a_1-d)=n(2a_1-d)$ (9b) pa je

$a_1=\frac{d}{2}$ (2b), odakle slijedi $\frac{a_m}{a_n}=\frac{\frac{d}{2}+(m-1)d}{\frac{d}{2}+(n-1)d}=\frac{2m-1}{2n-1}$. Ovo je trebalo dokazati (6b).

(25b)

3. Def. Za funkciju f:E→F kažemo da je injekcija, odnosno injektivno preslikavanje ako

$f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$

Dokažimo da je f injektivno preslikavanje.

Neka je $f(y_1)=f(y_2)$. Tada je $x^2+f(y_1)=x^2+f(y_2)$ pa je

$f(x^2+f(y_1))=f(x^2+f(y_2))$

Zbog uslova zadatka je $y_1+(f(x))^2 = y_2+(f(x))^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad y_1=y_2$

Dakle f je injektivna funkcija (10b)

Neka je y=0. Tada je $f(x^2+f(0)) = (f(x))^2$ (*)

Ako u (*) x zamijenimo sa –x imamo:

$(f(-x))^2 = f((-x)^2+f(0))= f(x^2+f(0))= (f(x))^2$

Odavde slijedi f(-x)=f(x) ili je f(-x) = -f(x). Kako je funkcija injektivna, to je f(-x)=-f(x)

Dakle funkcija f je neparna funkcija (11b)

(21b)

4. Koristeći poznate obrasce $P_\Delta=\frac{ah_a}{2}=\frac{bh_b}{2}=\frac{ch_c}{2}, P_\Delta=s\cdot r, P_\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$

gdje je $s=\frac{a+b+c}{2}$, P = $\frac{abc}{4R}$ dobijemo (4b)

$$(h_a-2r)(h_b-2r)(h_c-2r)=\left(\frac{2P}{a}-2r\right)\left(\frac{2P}{b}-2r\right)\left(\frac{2P}{c}-2r\right)=\left(\frac{2sr}{a}-2r\right)\left(\frac{2sr}{b}-2r\right)\left(\frac{2sr}{c}-2r\right)=$$

$=8r^3\cdot\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$, (6b) a odavde zbog $abc=4RP$ i $(s-a)(s-b)(s-c)=\frac{P^2}{s}$ (4b)

$$\left(h_a-2r\right)\left(h_b-2r\right)\left(h_c-2r\right)=8r^3\cdot\frac{\frac{P^2}{s}}{4RP}=2r^3\cdot\frac{P}{sR}=2r^3\cdot\frac{rs}{sR}=2r^4\cdot\frac{1}{R}\text{(6b)}$$

Odavde zbog poznate Ojlerove nejednakosti $R\geq 2r, tj. \frac{1}{R}\leq\frac{1}{2r}$ (4b) dobijemo

$$\left(h_a-2r\right)\left(h_b-2r\right)\left(h_c-2r\right)\leq 2r^4\cdot\frac{1}{2r}=r^3\text{(2b).}$$

Jednakost vrijedi ako je R=2r, tj. za jednakostranični trougao(2b).
(28b)

Zeničko-dobojski kanton
Ministarstvo za obrazovanje, nauku, kulturu i sport
Pedagoški zavod Zenica

DODATNI ZADACI

Dodatni zadatak za prvi razred

1. Neka je četverougao ABCD kvadrat sa dužinom stranice od 1cm, a tačke $M\in AB, N\in BC, P\in CD, Q\in DA$. Dokazati da je obim četverougla $MNPQ$ manji od četiri.

Dodatni zadatak za drugi razred

1. Za svaki prirodan broj k je $(1+i)^{4k}$ realan, a $(1-i)^{4k+2}$ čisto imaginaran broj. Dokazati.

Dodatni zadatak za treći razred

1. U trouglu ABC dato je $\alpha=30^0$, $h_b+h_c=\frac{5}{2}$ i površina $P=\frac{3}{2}$. Odrediti dužine stranica b i c.

Dodatni zadatak za četvrti razred

1. Odrediti $f(x)$, ako je $f\left(\frac{x+1}{x-2}\right)+3f\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=x, x\neq 2, x\neq -1$