KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
ZA I RAZRED

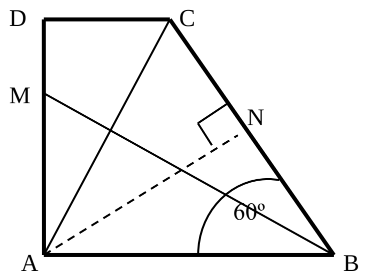
1. Nacrtajte u pravouglom koordinatnom sistemu prave p_1 i p_2 čije su jednačine

$$p_1: \ y = x- 4 \ \text{ i } \ p_2: y-2x+2=0.$$

Izračunajte površinu lika koju zatvaraju prave p_1 i p_2 sa koordinatnim osama.

(26b)

2. Četverougao ima kod tjemena A prav ugao, a kod B ugao od 60°. Simetrala ugla kod B siječe stranicu AD u tački M tako da je odsječak AM dva puta veći od odsječka MD, a normala spuštena iz tjemena A na stranicu BC dijeli ovu stranicu na dva jednaka odsječka. Izračunajte stranice i površinu četverougla ABCD ako je njegov obim $O = 5 + \sqrt{3}$.



(30b)

3. Pokažite da je rješenje (po x) jednačine $\dfrac{ax+b}{x^2-ax} + \dfrac{ax-b}{x^2+ax} = \dfrac{2ax+4}{x^2-a^2}$ pozitivno ako su dati realni brojevi a i b istog znaka i ako je $x \neq 0$ i $|x| \neq a$.

(24b)

4. Neka su a i b realni brojevi za koje važi $a^3 - 3ab^2 = 8$ i $b^3 - 3a^2b = \sqrt{61}$. Izračunajte $a^2 + b^2$.

(20b)

Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta.
Dozvoljena je upotreba samo pribora za crtanje i pisanje.
Rješenje svakog zadatka kratko i jasno obrazložiti.

Mnogo uspjeha u radu!

Visoko, 16.3.2019. godine.

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
ZA II RAZRED

1. Riješiti jednačinu: $2\log_4(2^x-1)+x+\log_{\frac{1}{2}}3+\log_{\frac{\sqrt{6}}{6}}6=0$

   u skupu realnih brojeva.

   (31b)

2. Neka su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednačine $x^2+(1-2m)x+3m-5=0$, gdje je m realan parametar.
   a) Odrediti parametar m tako da je $x_1^2+x_2^2=17$.
   b) Nađi vezu između rješenja ove jednačine koja ne zavisi od parametra m.

   (21b)

3. Za trougao ABC vrijedi $2\angle CBA=\angle CAB+\angle ACB$. U unutrašnjosti trougla ABC je odabrana tačka P tako da vrijedi $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA$.
   Ako je $\overline{PA}=18$, $\overline{PC}=8$, koliko iznosi $\overline{PB}$?

   (29b)

4. Odrediti sve kompleksne brojeve z takve da je
   $$2(1+i)z^2-4(2-i)z-5-3i=0 .$$

   (19b)

Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta.
Dozvoljena je upotreba samo pribora za crtanje i pisanje.
Rješenje svakog zadatka kratko i jasno obrazložiti.

Mnogo uspjeha u radu!

Visoko, 16.3.2019.godine

**KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
ZA III RAZRED**

1. Riješite jednačinu $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

(21b)

2. Dokažite identitet: $\dfrac{\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha}{\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha} = tg\,\dfrac{5\alpha}{2}$

(23b)

3. Odredite jednačinu hiperbole, ako je udaljenost između fokusa koji leže na osi x jednaka $2e = 10\sqrt{3}$, a jednačine asimptota su $y = \pm\frac{3}{4}x$. Izračunajte površinu trougla OMN, kome dvije stranice pripadaju asimptotama hiperbole, a treća stranica pravoj čija je jednačina $x - 4 = 0$.

(31b)

4. Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi takvi da je $xyz = 1$. Dokažite nejednakost

$$x(y^3 - 1) + y(z^3 - 1) + z(x^3 - 1) \geq 0$$

(25b)

Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta.
Dozvoljena je upotreba samo pribora za crtanje i pisanje.
Rješenje svakog zadatka kratko i jasno obrazložiti.

Mnogo uspjeha u radu!

Visoko, 16.3.2019. godine

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE ZA IV RAZRED

1. Odrediti $f(x)$, ako je

$$f\left(\frac{x+1}{x-2}\right)+3f\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=x,\quad x\neq 2\ ,\ x\neq -1.$$

(23b)

2. Tri realna broja a,b,c čine aritmetički niz, a njihovi kvadrati (uzeti istim redom) čine geometrijski niz. Odrediti količnik tog geometrijskog niza.

(30b)

3. Četiri prijatelja A,B,C,D zabavljaju se potežući konopac. Poznato je da:

a) makar i sa mukom B može sam da nadjača A i C koji vuku zajedno;
b) ako su sa jedne strane A i B, a sa druge C i D, rezultat je neriješen;
c) ako A i C promijene mjesta, onda dvojka A i D lako pobjeđuje protivnike.

Odredite njihov redoslijed po snazi.

(22b)

4. Izračunati sljedeću graničnu vrijednost: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^a-a^x}{x-a}$, $a>0$.

(25b)

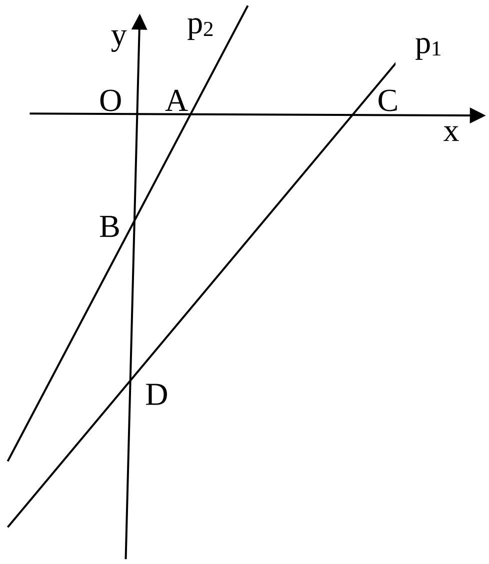
Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta.
Dozvoljena je upotreba samo pribora za crtanje i pisanje.
Rješenje svakog zadatka kratko i jasno obrazložiti.

Mnogo uspjeha u radu!

Visoko, 16.3.2019.godine

Moguća rješenja za I razred:

1.



(5b)

$P_{ABDC} = P_{OCD} - P_{OAB} = 7$ kv. jed. (3b) Jer je:

$p_1 : y = x-4$, pa je C(4,0) i D(0,-4) (6b)
Zato je

$P_{OCD} = (4\cdot 4)\ \frac{1}{2} = 8$ kv. jed. (3b)

$p_2 : y-2x+2=0 \Rightarrow y=2x-2$, pa je A(1,0) i B(0,-2) (6b)
Zato je

$P_{OAB} = (1\cdot 2)\ \frac{1}{2} = 1$kv. jed. (3b)

(26b)

2. Pošto je $\overline{AN} \perp \overline{BC}$ i $\overline{BN} = \overline{NC}$ to je $\overline{AB} = \overline{AC}$, tj. ΔABC je jednakokraki (2b), a zbog $\angle B = 60^0$ trougao ΔABC je jednakostraničan (2b). Odatle je $\overline{AB} = \overline{BC} = a$ i $\angle CAB = 60^0$ (2b). Posmatrajmo $\Delta ABS : \angle SAB = 60^0$ i $\angle ABS = 30^0$. S toga možemo zaključiti da je u ovom trouglu $\angle S = 90^0$, pa je $\overline{MB} \perp \overline{AC}$ (2b). Posmatrajmo sada $\Delta ASM : \angle SAM = 30^0$ i $\angle S = 90^0$, pa je $\angle AMS = 60^0$ (2b). Pošto je $\angle AMB = 60^0$ i $\overline{AB} \perp \overline{AM}$ to je ΔABM polovina jednakostraničnog trougla u kojem je $\overline{AB} = a$ visina a $\overline{MA}$ polovina stranice (3b). Zbog toga je: $\overline{AB} = a = \sqrt{3}\,\overline{MA}$, $\overline{MA} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ (2b). Vrijedi da je $\overline{MA} = 2\overline{MD} \Rightarrow \overline{MD} = \frac{1}{2}\overline{MA}$,

$\overline{MA} + \overline{MD} = \overline{AD} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}a}{3} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}a}{3} = \overline{AD} \ldots \overline{AD} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (3b), što znači da je $\overline{AD}$ visina jednakostraničnog trougla stranice $\overline{AC} = a$ (2b). Dakle $\angle D = 90^0$ i $\overline{CD} = \frac{a}{2}$ (2b).

Iz $O = a + a + \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2} = \ldots = \frac{a\left(5+\sqrt{3}\right)}{2}$ (2b).

Pošto je po uslovu zadatka $O = 5+\sqrt{3}$, to dobijemo $a = 2$ (2b), a $\overline{AB} = 2$, $\overline{AD} = \sqrt{3}$, $\overline{CD} = 1$, pa je $P = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ k. jed.(4b)

(30b)

3. $\frac{ax+b}{x^2-ax}+\frac{ax-b}{x^2+ax}=\frac{2ax+4}{x^2-a^2}$

$\frac{ax+b}{x(x-a)}+\frac{ax-b}{x(x+a)}=\frac{2ax+4}{(x-a)(x+a)}$ / x (x-a) (x+a) , $x\neq 0$, $|x|\neq a$ (4b)

(ax+b) (x+a) + (ax-b) (x-a) = (2ax+4) x
(ax+b) x + (ax+b) a + (ax-b) x - (ax-b) a = (2ax+4) x
$ax^2+\cancel{bx}+\cancel{a^2x}+ba+ax^2\cancel{-bx}-\cancel{a^2x}+ba=(2ax+4)x$
$\cancel{2ax^2}+2ba=\cancel{2ax^2}+4x$

$x=\frac{2ba}{4}$

$x=\frac{ba}{2}$ (12b)

Da bi rješenje x bilo pozitivno to mora biti $b\cdot a>0$ (4b), a da bi ovaj uslov bio ispunjen a i b moraju biti istog znaka (4b).

(24b)

4. $\left(a^2+b^2\right)^3=a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6=a^6-6a^4b^2+9a^2b^4+b^6-6a^2b^4+9a^4b^2=$

$=\left(a^3-3ab^2\right)^2+\left(b^3-3a^2b\right)^2$ (15b), odnosno imamo da je

$(a^2+b^2)^3=8^2+\left(\sqrt{61}\right)^2=64+61=125$, pa je $a^2+b^2=5$ (5b).

(20b)

Moguća rješenja za II razred:

1. $2\log_4(2^x-1)+x+\log_{\frac{1}{2}}3+\log_{\frac{\sqrt{6}}{6}}6=0$

$\log_{\frac{\sqrt{6}}{6}}6=\frac{\log_6 6}{\log_6\frac{\sqrt{6}}{6}}=\frac{1}{\log_6\sqrt{6}-1}=\frac{1}{\frac{1}{2}-1}=-2$; (3b) $2\log_{2^2}(2^x-1)+x+\log_{2^{-1}}3-2=0$

$2\cdot\frac{1}{2}\log_2(2^x-1)+x-\log_2 3-2=0$ (5b)

$\log_2\frac{2^x-1}{3}=2-x\Leftrightarrow 2^{2-x}=\frac{2^x-1}{3}\Leftrightarrow 3\cdot 2^{2-x}=2^x-1\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow 2^{2x}-2^x-12=0$ (7b)

Uvedimo smjenu: $2^x=t$ (3b), pa imamo $t^2-t-12=0$ (3b)

$t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4\cdot 12}}{2}=\ldots \qquad t_1=4\ ;\ t_2=-3$ (4b)

Vratimo u smjenu $2^x=4\Leftrightarrow x=2$ (2b) , $2^x=-3$ u skupu R nema rješenja (2b).
Provjerom dobijemo da je rješenje ove logaritamske jednačine je x=2 (2b)

(31b)

2. a) Na osnovu Vietovih pravila imamo $x_1+x_2=2m-1,\ \ x_1x_2=3m-5$ (4b) Kako je

$x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$ (2b), to je $(2m-1)^2-2(3m-5)=17$ (2b) tj.

$4m^2-4m+1-6m+10-17=0$, tj. $4m^2-10m-6=0$, tj. $m_1=-\frac{1}{2}, m_2=3$ (5b)

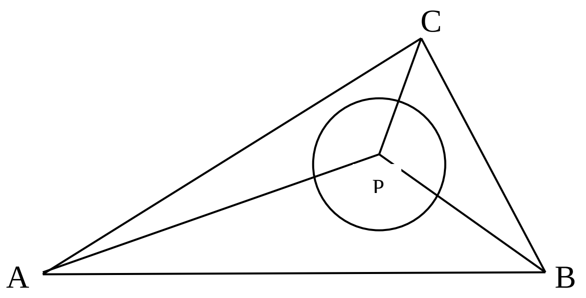
b) $x_1+x_2=2m-1,\ x_1x_2=3m-5$ imamo $m=\frac{x_1+x_2+1}{2}$ i $m=\frac{x_1x_2+5}{3}$ (4b). Odavde je

$$\frac{x_1+x_2+1}{2}=\frac{x_1x_2+5}{3},\ \text{tj}\ 3(x_1+x_2)-2x_1x_2=7\ (4b)$$

(21b)

3. Iz date jednakosti dobijemo
$2\angle CBA=\angle CAB+\angle ACB=180^0-\angle CBA\Rightarrow\angle ABC=60^0$ (10b)
Prema uslovu zadatka svi uglovi koje gradi tačka P sa vrhovima trougla su međusobno jednaki, 360º : 3=120º. (5b)
$\angle PAB=\angle 180^0-120^0-\angle PBA=60^0-\angle PBA=\angle ABC-\angle PBA=\angle PBC$, tj.
$\angle PAB=\angle PBC$. (5b)

(3b)



Dakle, $\Delta\, PAB$ sličan je $\Delta\ PBC$ (imaju po dva jednaka ugla) pa slijedi:
$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}},\ \text{tj.}\ \overline{PB}=\sqrt{\overline{PA}\cdot\overline{PC}}=\sqrt{18\cdot 8}=\sqrt{144}=12\ \ (6b)$$

(29b)

4. $2(1+i)z^2-4(2-i)z-5-3i=0$.

Rješavanjem kvadratne jednačine po z nalazimo:

$$z_{1,2}=\frac{4(2-i)\pm\sqrt{16(2-i)^2+4\cdot 2\cdot(1+i)\cdot(5+3i)}}{4\cdot(1+i)}$$ (5b) , odakle je

$$z_{1,2}=\frac{4(2-i)\pm\sqrt{16(3-4i)+8(2+8i)}}{4(1+i)}\ ;\ z_{1,2}=\frac{4(2-i)\pm\sqrt{64}}{4(1+i)}$$ (6b)

$z_1=\frac{4-i}{1+i}=\frac{3-5i}{2}$ (4b) $\quad z_2=\frac{-i}{1+i}=-\frac{1+i}{2}$ (4b) (19b)

Visoko,16.3.2019.godine

Moguća rješenja za III razred:

1. $4^x-3^x\cdot 3^{-\frac{1}{2}}=3^x\cdot 3^{\frac{1}{2}}-2^{2x}\cdot 2^{-1}\Leftrightarrow ...(10b)\Leftrightarrow 4^x+\frac{1}{2}4^x=3^x\cdot\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(6b)$, odnosno

$\left(\frac{4}{3}\right)^x=\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$(5b). (21b)

2. Primjenjujući formule: $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, $tgx=\frac{\sin x}{\cos x}$, odnosno $\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ (6b), imamo:

$$\frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\sin 4\alpha}{\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\cos 4\alpha}=\frac{\sin\alpha+\sin 4\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 4\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}+2\sin\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}+2\cos\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{5\alpha}{2}\left(\cos\frac{3\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos\frac{5\alpha}{2}\left(\cos\frac{3\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{\sin\frac{5\alpha}{2}}{\cos\frac{5\alpha}{2}}=tg\frac{5\alpha}{2}\ (17b)$$

(23b)

3. Udaljenost između fokusa je $2e = 10\sqrt{3}$, gdje je $e = \sqrt{a^2 + b^2}$ (3b), odakle je $a^2 + b^2 = 75(1)$ (3b). Iz jednačina asimptota $y = \pm\frac{b}{a} \cdot x$ i zadanih jednačina asimptota $y = \pm\frac{3}{4} \cdot x$ slijedi $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}(2)$ (4b).

Jednačine (1) i (2) čine sistem, odakle je $a^2 = 48$ i $b^2 = 27$ (4b), pa jednačina hiperbole glasi $9x^2 - 16y^2 = 432$ (4b).

Rješavanjem sistema jednačina

$y = -\frac{3}{4}x \wedge y = \frac{3}{4}x \wedge x = 4$ (3b), dobijemo vrhove trougla $O(0,0); M(4,-3); N(4,3)$ (4b).

Iz formule za površinu trougla $2P = |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$ (2b), imamo da je $P = 12$ kv. jed. (4b).

A može i ovako: u trouglu OMN osnovica je $|MN| = 6$ i visina $h = 4$, pa je $P = 12$ kv. jed.

(31b)

4. Data nejednakost ekvivalentna je sa $xy^3 + yz^3 + zx^3 \geq x + y + z$ (3b). Nakon dijeljenja sa xyz dobićemo

$$\frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{y} \geq \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy}$$

$$\frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{y} \geq \frac{x+y+z}{xyz}$$

$$\frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{y} \geq x + y + z \quad (7b) \qquad (*)$$

Dokazivanje početne nejednakosti svodimo na dokazivanje nejednakosti (*)

S druge strane znamo da za pozitivne realne brojeve a, b vrijedi $(a-b)^2 \geq 0$, pa je $a^2 \geq 2ab - b^2$, pri čemu znak jednakosti važi akko je $a = b$. Nakon dijeljenja sa b dobijemo $\frac{a^2}{b} \geq 2a - b$ (10b). Tada je

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq (2x - y) + (2y - z) + (2z - x) = x + y + z,$$

pri čemu znak jednakosti važi ako i samo ako je $x = y = z = 1$ štd (5b)

(25b)

Visoko,16.3.2019.godine

Moguća rješenja za IV razred:

1. Označimo sa $t=\frac{x+1}{x-2}$ (2b), tada je $x=\frac{2t+1}{t-1}$, $t\neq 1$ (3b). Data jednakost postaje

$$f(t)+3f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{2t+1}{t-1},\ t\neq 0, t\neq 1 \quad \text{(2b)}\ (*)$$

Ako u jednakosti $(*)$ umjesto t pišemo $\frac{1}{t}$, dobijemo $f\left(\frac{1}{t}\right)+3f(t)=\frac{2t+1}{\frac{1}{t}-1}=\ldots\Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{t}\right)+3f(t)=\frac{2+t}{1-t}$ (4b) $(**)$. Ako jednakost $(**)$ pomnožimo sa 3 i oduzmemo od $(*)$ dobijemo

$-8f(t)=\frac{2t+1}{t-1}-3\frac{2+t}{1-t}$ (7b). Odavde slijedi $f(t)=\frac{5t+7}{8(1-t)}$, tj. $f(x)=\frac{5x+7}{8(1-x)}$ (5b).

(23b)

2. Iz uslova zadatka imamo $a+c=2b$ i $a^2c^2=b^4$ (2b). Iz prve jednačine je $a=2b-c$ (1b). Uvrštavanjem u drugu jednačinu dobijemo $(2b-c)^2\cdot c^2=b^4$ (2b), tj.

$c^4-4bc^3+4b^2c^2-b^4=0$ (1b)

Pri dijeljenju jednakosti (*) sa b^4 ($b\neq 0$) (2b) dobijemo

$$\left(\frac{c}{b}\right)^4-4\left(\frac{c}{b}\right)^3+4\left(\frac{c}{b}\right)^2-1=0 \quad (*)\ \text{(2b)}$$

Smjena: $\frac{c}{b}=y$ (1b)

$$y^4-4y^3+4y^2-1=0$$
$$y^4-1-4y^2(y-1)=0$$
$$(y-1)\left[(y+1)(y^2+1)-4y^2\right]=0$$
$$y-1=0\vee y^3-3y^2+y+1=0 \quad \textit{(4b)}$$

$y_1=1$ (1b) , pogodimo jedno rješenje j-ne $y^3-3y^2+y+1=0$, to je $y_2=1$ (2b)

$$(y^3-3y^2+y+1):(y-1)=y^2-2y-1$$

Riješimo sada

$$y^2-2y-1=0$$
$$y_{3,4}=1\pm\sqrt{2} \quad \text{(4b)}$$

Rješenja jednačine (*) četvrtog stepena po $\frac{c}{b}$ su :

$1, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}$ (3b) što znači da je traženi količnik $\frac{c^2}{b^2}$ jednak

$1, \left(1+\sqrt{2}\right)^2=3+2\sqrt{2}, \left(1-\sqrt{2}\right)^2=3-2\sqrt{2}$.(5b) (30b)

3. Prema uslovu b) A i B su zajedno jednaki sa C i D (4b), a po uslovu c) A i D su jači nego B i C (4b). Iz ova dva uslova slijedi da je D jači nego B (4b). Iz uslova c) tada slijedi da je A jači od C (4b). Zbog uslova a) B je jači od A i C (4b), pa je prema tome redoslijed po snazi sljedeći: prvi je D, drugi B, treći A i četvrti C .(2b)

(22b)

4. $$\lim_{x\to a}\frac{x^a-a^x}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^a-a^a+a^a-a^x}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^a-a^a}{x-a}-\lim_{x\to a}\frac{a^a\left(a^{x-a}-1\right)}{x-a}=\text{(5b)}=$$

$$\lim_{x\to a}\frac{(a+x-a)^a-a^a}{x-a}-a^a\ln a=\lim_{x\to a}\frac{a^a\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^a-a^a}{x-a}-a^a\ln a=\text{(5b)}$$

$$=\lim_{x\to a}a^{a-1}\frac{\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^a-1}{\frac{x-a}{a}}-a^a\ln a=a^{a-1}\cdot a-a^a\ln a=a^a(1-\ln a)\text{(15b)}$$

(25b)

Dodatni zadatak za prvi razred:

Za koje vrijednosti promjenljivih x i y će razlika izraza $\frac{2x+15}{8}$ i $1\frac{1}{3}(y-1)$ biti 3 puta manja od izraza $2(5-2y)$, a izraz $\frac{x+5\frac{3}{4}}{2}$ biti za $0{,}125$ veći od $3y$?

Dodatni zadatak za drugi razred:

Naći najveću vrijednost razlike $x-y$ ako je $2x^2+2y^2=x+y$, pri čemu su x i y realni brojevi.

Dodatni zadatak za treći razred:

Odrediti koordinate tačke A koja je simetrična tački B(5,-2) u odnosu na pravu 3x-2y-6=0.

Dodatni zadatak za četvrti razred:

Dokazati metodom matematičke indukcije da ¸je broj $4^{2n}-3^{2n}-7$ djeljiv sa 168 za svaki prirodan broj n .