KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE

ZA I RAZRED

Zenica, 26. 03. 2022. god.

1. Oko jednakostraničnog trougla opisana je kružnica. Središta lukova AB i AC određuju duž koja je stranicama AB i AC podijeljena na tri jednaka dijela. Dokazati. (28b)

2. Data je jednačina $\frac{2x}{a^3-8} - \frac{a}{a^2+2a+4} = \frac{x-1}{a-2}$, $a \in \mathbb{R}$.

Riješiti datu jednačinu po x i odredi za koje je vrijednosti broja a rješenje date jednačine pozitivan broj. (27b)

3. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija takva da za svako $x \in \mathbb{R}$ važi

$$f(3x-1) = 6x-8,$$

$a)$ Odrediti $f(5)$.
$b)$ Odrediti $f(x)$ za svako $x \in \mathbb{R}$.
$c)$ Dokazati da je f bijektivna funkcija. (25b)

4. Pitali prodavca koliko ima jabuka u korpi. On je odgovorio: ,,Ako ih brojim po dvije ili po tri ili po četiri ili po pet ili po šest uvijek mi jedna ostane. Ako ih brojim po sedam, ne ostaje mi ni jedna.“ Koliko je bilo jabuka u korpi? Odrediti najmanji broj jabuka koji je bio u korpi. (20b)

Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta.
Dozvoljena je upotreba samo pribora za crtanje i pisanje.
Rješenje svakog zadatka jasno obrazložiti.
Mnogo uspjeha u radu!

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE

ZA II RAZRED

Zenica, 26. 03. 2022. god.

1. U pravougaonik ABCD sa stranicama AB = 10 cm i BC= 5 cm upiši polukrug prečnika AB. U kom omjeru dijeli polukrug dijagonalu pravougaonika?

(26b)

3. Odrediti sve kompleksne brojeve z za koje važi $|z| = |z - 2i|$ i $|z - 1| = 1$

(22b)

3. Funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zadata je sa $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$, za svako $x \in \mathbb{R}$. Riješiti nejednačinu $f(f(x)) \leq 0$.

(27b)

4. Riješi eksponencijalnu jednačinu $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$

(25b)

Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta.
Dozvoljena je upotreba samo pribora za crtanje i pisanje.
Rješenje svakog zadatka jasno obrazložiti.
Mnogo uspjeha u radu!

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE

ZA III RAZRED

Zenica, 26. 03. 2022. god.

1. Riješiti jednačinu $\sqrt{cos^2x + \frac{1}{2}} + \sqrt{sin^2x + \frac{1}{2}} = 2$.

(26b)

2. Dokazati da za $\forall a > 0$ važi nejednakost $log_3^2\, a + 2\, log_3 a \cdot log_3 \frac{3}{a} \leq 1$.

(24b)

3. Naći geometrijsko mjesto vrhova parabola $y = ax^2 + (2a - 3)x + a + 1$, gdje je a realan broj različit od nule.

(27b)

4. Ako su stranice trougla a – 2, a, a + 2 i jedan ugao trougla ima vrijednost 120° , odrediti dužine njegovih stranica.

(23b)

Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta.
Dozvoljena je upotreba samo pribora za crtanje i pisanje.
Rješenje svakog zadatka jasno obrazložiti.
Mnogo uspjeha u radu!

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE

ZA IV RAZRED

Zenica, 26. 03. 2022. god.

1. Od četiri broja, prva tri su članovi geometrijskog niza, a posljednja tri aritmetičkog niza. Suma krajnjih brojeva je 21, a suma srednjih je 18. Odredi ove brojeve.

(27b)

2. U dizajniranju aviona važnu ulogu ima otpor, odnosno sila usporavanja kojom zrak djeluje na avion. Jedan model kojim se mjeri otpor dat je funkcijom $F(v) = Av^2 + \frac{B}{v^2}$,
gdje su A i B pozitivne konstante, a v brzina aviona u $\frac{km}{h}$. Eksperimentalno je utvrđeno da je otpor minimalan pri brzini od 250 $\frac{km}{h}$. Odredi vrijednost omjera $\frac{B}{A}$.

(23b)

3. Odredi sve vrijednosti parametra k za koje postoji konačna granična vrijednost

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{ctgx} - \frac{k}{sin2x} \right)$$

(29b)

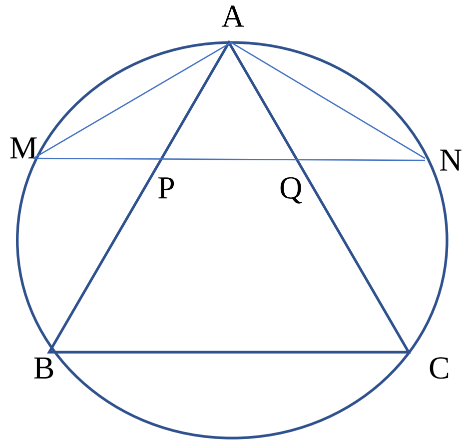
4. U jednoj kutiji su dvije bijele kuglice, u drugoj dvije crne kuglice, a u trećoj jedna bijela i jedna crna kuglica. Na svakoj kutiji se nalazila oznaka koja je pokazivala njen sadržaj (BB, CC, BC). Neko je izmijenio oznake tako da nijedna od njih ne pokazuje tačno sadržaj kutije. Koliko najmanje kuglica treba izvući da bi se odredio sastav svih kutija?

(21b)

Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta.
Dozvoljena je upotreba samo pribora za crtanje i pisanje.
Rješenje svakog zadatka jasno obrazložiti.
Mnogo uspjeha u radu!

Moguća rješenja zadataka za I razred

1.



(5b)

Neka su M i N središta datih lukova i neka su P i Q tačke u kojima stranice AB i AC sijeku tetivu MN. Duži AM i AN jednake su među sobom, jer su uglovi AMN i ANM po 30° (5b). Kako su i uglovi MAB i NAC jednaki (polovine uglova od 60°, pa su po 30°) (3b), to su jednakokraki trouglovi AMP i ANQ podudarni među sobom (3b) i MP=AP=AQ=QN (*) (2b). Ovi jednakokraki trouglovi imaju na osnovicama AM i AN uglove od 30° $(2b)$, pa slijedi da su unutrašnji uglovi trougla APQ svi po 60°, tj. APQ je jednakostraničan trougao (2b) i AP=AQ=PQ (**) (2b) Iz jednakosti (*) i (**) dolazimo do zaključka MP=QN=PQ, štd. (4b)

(28b)

2. $\frac{2x}{a^3-8} - \frac{a}{a^2+2a+4} = \frac{x-1}{a-2}, \; a \in \mathbb{R}.$

$\frac{2x}{(a-2)(a^2+2a+4)} - \frac{a}{a^2+2a+4} = \frac{x-1}{a-2} \; / \, (a-2)(a^2+2a+4), a \neq 2$, (3b)

$2x - a(a-2) = (x-1)(a^2+2a+4)$ (2b)

$2x \cancel{-a^2} + 2a = a^2x + 2ax + 4x - a^2 \cancel{-} 2a - 4$ (2b)

$2a + 2a + 4 = -2x + a^2x + 2ax + 4x$ (2b)

$4a + 4 = 2x + a^2x + 2ax$ (2b)

$4(a+1) = x(a^2+2a+2)$ (2b)

$x = \frac{4(a+1)}{a^2+2a+2}$ (2b)

Da bi rješenje x >0 (1b) to mora biti $\frac{4(a+1)}{a^2+2a+2} > (1b) \Leftrightarrow 4(a+1) > 0 \wedge a^2 + 2a + 2 > 0$

(7b) $a > -1 \;\; \wedge \;\; (a+1)^2 + 1 > 0, \forall a \in \mathbb{R}$

Rješenje date jednačine će biti pozitivan broj za $a > -1$. (3b)

(27b)

3. $f(3x-1)=6x-8$,

Uvedimo smjenu $t=3x-1, \forall x \in \mathbb{R}$, tada je $x=\frac{t+1}{3}$, pa je (10b)

$f(t)=6\frac{t+1}{3}-8$

$f(t)=2t-6, \forall t \in \mathbb{R}$ (5b)

Dakle, $f(5)=2\cdot 5-6=4$ (2b) i uopšte $f(x)=2x-6, \forall x \in \mathbb{R}$ (2b)

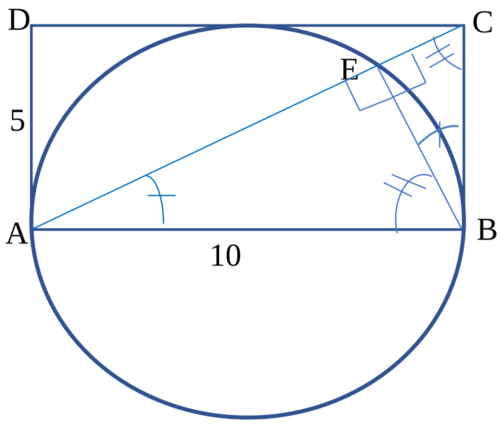
Predpostavimo da postoje $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ takvi da $f(x_1)=f(x_2)$, to bi značilo da je $2x_1-6=2x_2-6$, odakle nakon poništavanja i skraćivanja direktno slijedi da je $x_1=x_2$ te je promatrana funkcija injekcija (2,5b). Sada odaberimo proizvoljno $y \in \mathbb{R}$. Potrebno je dokazati da za taj (pa onda i bilo koji) $y \in \mathbb{R}$ postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $2x-6=y$. Neka vrijednost varijable x iznosi $\frac{y+6}{2}$, onda vrijedi da je $f(x)=f\left(\frac{y+6}{2}\right)=2\frac{y+6}{2}-6=y$, pa je zadana funkcija sirjekcija (2,5b). Pošto je funkcija injektivna i sirjektivna onda je ona i bijektivna. (1b) (25b)

4. Traženi broj je oblika 60k+1, (4b) gdje je k prirodan broj, a 60 je NZS za 2,3,4,5 i 6. (6b)

Najmanji broj navedenog oblika, koji je djeljiv sa 7, jeste broj 301 (5b), koji se dobija za k=5. (5b) (20b)

Moguća rješenja zadataka za II razred

1. Neka je E presječna tačka dijagonale AC i polukruga k. Tada je $\angle AEB \cong 90°$, ugao nad prečnikom (5b), $\angle BEC \cong 90°$, jer je uporedni ugao ugla od 90° (2b).
Trouglovi ΔABE i ΔBEC su pravougli i slični su. (3b) Visina je geometrijska sredina odsječaka koje čini na hipotenuzi. (10b)
AE : EC = 4 : 1 (1b)



(5b)

(26b)

2. Neka je $z = a + bi,\ \ a, b \in \mathbb{R}$
Pošto je prema uslovu zadatka $|z| = |z - 2i|$ to je $|a + bi| = |a + (b-2)i|$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (b-2)^2}$$
$$a^2 + b^2 = a^2 + (b-2)^2$$
$$b^2 = b^2 - 4b + 4$$

<u>b=1 (10b)</u>

Takođe iz uslova zadatka $|z - 1| = 1$ je $|a + bi - 1| = 1$

$$|a + i - 1| = 1$$
$$\sqrt{(a-1)^2 + 1} = 1$$
$$\sqrt{a^2 - 2a + 2} = 1 \ /^2$$
$$a^2 - 2a + 1 = 0$$
$$\dots$$

<u>$a_{1,2} = 1$ (10b)</u>

Traženi kompleksan broj je z=1+i. (2b)

(22b)

3. $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$

Rješenje kvadratne jednačine $3x^2 + 4x + 1 = 0$ su $x = -1\ \ i\ \ x = -\frac{1}{3}$ (5b)

Zato je $f(x) = 3(x + \frac{1}{3})(x + 1)$, s toga je $f(f(x)) = 3(f(x) + \frac{1}{3})(f(x) + 1)$ (5b)

$Sada\ je\ f\big(f(x)\big) \leq 0 \Leftrightarrow 3\left(f(x) + \frac{1}{3}\right)(f(x) + 1) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{3}$(*) (6b)

Rješenja kvadratne nejednačine $-1 \leq f(x) \Leftrightarrow 3x^2 + 4x + 2 \geq 0$ su svi realni brojevi jer je diskriminanta kvadratne funkcije $3x^2 + 4x + 2$ jednaka –8. (4b)

Jedino rješenje kvadratne nejednačine $f(x) \leq -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x^2 + 4x + \frac{4}{3} \leq 0$ je broj x=$-\frac{2}{3}$,
jer je diskriminanta kvadratne funkcije $3x^2 + 4x + \frac{4}{3}$ jednaka 0.(4b)

Dakle, jedino rješenje polazne nejednačine (*) je x=$-\frac{2}{3}$. (3b)

(27b)

4. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \frac{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x \cdot \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x}{\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x} = 4 \text{ (3b)}$$

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \frac{1}{\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x} = 4 \qquad \text{(3b)}$$

Uvođenjem smjene $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x$ = z dobijemo (3b)

$z + \frac{1}{z} = 4 \Leftrightarrow z^2 - 4z + 1 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 2 + \sqrt{3},\ \ z_2 = 2 - \sqrt{3}$ (9b)

Iz uvedene smjene je

$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x$=2$\pm\sqrt{3}$ (3b), pa je x=2 ∨ x=-2 (4b)

(25b)

Moguća rješenja zadataka za III razred

1. $\sqrt{cos^2x+\frac{1}{2}}+\sqrt{sin^2x+\frac{1}{2}}=2$

Označimo sa a= $\sqrt{cos^2x+\frac{1}{2}}$ i b= $\sqrt{sin^2x+\frac{1}{2}}$. Tada važi a+b=2 (*). (4b)

Nakon kvadriranja i sređivanja date jednačine dobijamo da je a·b=1 (**). (6b)
Iz (*) i (**) i na osnovu Vietovih formula zaključujemo da su a i b rješenja kvadratne jednačine $t^2-2t+1=0$ (4b) odakle dobijamo a=b=1(3b)odnosno $cos^2x=sin^2x=\frac{1}{2}$.(4b)
Skup rješenja date jednačine je $\left\{x \;\; x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$. (5b)

(26b)

2. Data nejednakost $log_3^2\,a+2\,log_3a\,\cdot log_3\frac{3}{a}\leq 1$
ekvivalentna je sa sljedećim nejednakostima

$log_3^2\,a+2\,log_3a\,\cdot(log_33-log_3a)\leq 1$ (3b)
$log_3^2\,a+2\,log_3a\,\cdot(1-log_3a)\leq 1$ (3b)
$log_3^2\,a+2\,log_3a-2log_3^2a\leq 1$ (3b)
-$log_3^2\,a+2\,log_3a\leq 1$ (3b)
-$log_3^2\,a+2\,log_3a-1\leq 0$ / (-1) (3b)
$log_3^2\,a-2\,log_3a+1\geq 0$ (3b)
$(log_3a-1)^2\geq 0$ (3b)

Posljednja nejednakost je očigledno tačna za $\forall a>0$. (3b)

(24b)

3. $y=ax^2+(2a-3)x+a+1,\; a\in\mathbb{R}/\{0\}$
Koordinate tjemena parabola

$\left(\frac{-(2a-3)}{2a},\; \frac{-\left[(2a-3)^2-4a\,(a+1)\right]}{4a}\right)$ (3b)
$\left(\frac{3-2a}{2a},\; a+1-\frac{(2a-3)^2}{4a}\right)$ (4b)
Odavde je $x_T=\frac{3-2a}{2a}$ $(*)$, $y_T=a+1-\frac{(2a-3)^2}{4a}$
Iz (*) je $a=\frac{3}{2x_T+2}, x_T\neq -1$ pa je (3b)

$y_T=\frac{3}{2x_T+2}+1-\frac{\left(2\frac{3}{2x_T+2}-3\right)^2}{4\frac{3}{2x_T+2}}=\cdots=\frac{-3x_T{}^2+2x_T+5}{2x_T+2}=\frac{-3\left(x-\frac{5}{3}\right)(x+1)}{(x+1)}=\frac{-3}{2}x_T+\frac{5}{2}$ (10b)

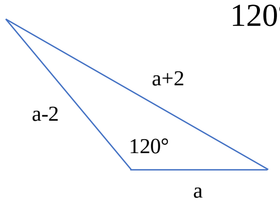
$y_T=\frac{-3}{2}x_T+\frac{5}{2},\; x_T\neq -1$ (3b)

Odavde vidimo da je geometrijsko mjesto tačaka prava bez jedne tačke. (4b) (27b)

4. Ako su stranice trougla a −2, a, a + 2 i jedan ugao iznosi 120° , odrediti stranice.

120° je naspram najveće stranice. (5b)

(2b)



(2b) $c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos120°$

$(a+2)^2 = a^2 + (a-2)^2 - 2a(a-2)(-\frac{1}{2})$

...

$2a^2 - 10a = 0$

...

a=0, nemoguće

a=5 (12b)

Odredimo ostale dvije stranice...3 i 7. (2b)

(23b)

Moguća rješenja zadataka za IV razred

1. Prema datim uvjetima traži se niz: a, aq, aq^2, aq(2q – 1) (2b).
Dalje je: a+aq(2q – 1) = 21 (3b)
aq+ aq^2 =18

a(1+2q^2-q)=21 (3b)
aq(1+q)=18

$\frac{a(1+2q^2-q)}{aq(1+q)} = \frac{21}{18}$ (3b)
aq(1+q)=18

6(1+2q^2-q)=7q(1+q) (3b)
aq(1+q)=18

5q^2-13q+6=0 (3b)
aq(1+q)=18

q=2, q=$\frac{3}{5}$
a=$\frac{18}{q(1+q)}$; (3b)

q=2, a=3
q=$\frac{3}{5}$, a=$\frac{75}{4}$ (3b)

Traženi brojevi su: 3, 6, 12, 18 (2b), odnosno, $\frac{75}{4}$, $\frac{45}{4}$, $\frac{27}{4}$, $\frac{9}{4}$ (2b),

(27b)

2. $F'(v) = 2Av - \frac{2B}{v^3}$; $F'(v) = 0 \Rightarrow 2Av - \frac{2B}{v^3} = 0 \Rightarrow v^4 = \frac{B}{A}$ (7b)
Kako je v=250 $\frac{km}{h}$ tačka minimuma , ona je i stacionarna tačka (10b), pa zadovoljava jednačinu $F'(v) = 0\ (2b)$, odnosno $250^4 = \frac{B}{A}$, što je ujedno i traženi omjer (4b).

(23b)

3. Prvo primjetimo $\frac{x}{ctgx} - \frac{k}{sin2x} = \frac{x}{\frac{cosx}{sinx}} - \frac{k}{sin2x} = \frac{xsinx}{cosx} - \frac{k}{sin2x} = \frac{2xsin^2x}{2sinxcosx} - \frac{k}{sin2x} =$
$= \frac{2xsin^2x-k}{2sinxcosx}$ (8b)

Kada x→ $\frac{\pi}{2}$, nazivnik ovog razlomka teži ka 0 (3b), a za k$\neq \pi$ brojnik ne teži 0 (3b), pa izraz tada ne može imati konačnu graničnu vrijednost (3b).
Ostaje da provjerimo slučaj k=π. Ispunjeni su uslovi za primjenu Lopitalovog pravila, pa tada imamo

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2xsin^2x-\pi}{sin2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2sin^2x+4xsinxcosx}{2cos2x} = \frac{2+0}{-2} = -1$$

Dakle, k = π je jedina vrijednost parametra k za koju je ova granična vrijednost konačna (12b).

(29b)

4. Dovoljno je izvući jednu kuglicu i to iz kutije na kojoj stoji oznaka BC(10b). Pošto toj oznaci ne odgovara sadržaj te kutije, to se u njoj nalaze kuglice iste boje (2b).
Pretpostavimo da smo izvukli bijelu kuglicu (2b). Tada je sadržaj kutija sljedeći:
u kutiji sa oznakom BC nalaze se dvije bijele kuglice, (2b)
u kutiji sa oznakom BB nalaze se dvije crne kuglice, (2b)
u kutiji sa oznakom CC nalaze se jedna bijela i jedna crna kuglica. (2b)
Slično zaključujemo i ako je izvučena crna kuglica (1b).

(21b)