KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE

ZA I RAZRED

1. Koliko najviše ravni određuju tri paralelne prave i pet različitih tačaka od kojih su tri kolinearne?

(27b)

2. Dat je pravougli trapez $ABCD$, pri čemu su $\measuredangle A = \measuredangle D = 90°$ i $AB \parallel CD$, takav da je $BC = AB + CD$. Neka je E tačka na pravoj AB takva da je A između $E\ i\ B\ i\ AE = 4CD$. Dokazati da je $\measuredangle EDB = 90^{\circ}$.

(28b)

3. Riješiti po x sljedeću jednačinu:

$$|x-1| + |x-2| + |x-3| = 18.$$

(23b)

4. Na ispitu je 21 učenik rješavao tri zadatka. Prvi i drugi zadatak riješilo je 6 učenika, drugi i treći zadatak 7 učenika, a prvi i treći zadatak 11 učenika. Pokazati da postoje bar dva učenika koji su riješili sva tri zadatka i da postoji bar jedan učenik koji je riješio najviše jedan zadatak.

(22b)

Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta.
Dozvoljena je upotreba samo pribora za crtanje i pisanje.
Rješenje svakog zadatka jasno obrazložiti.
Mnogo uspjeha u radu!

Zenica, 9. mart 2024. godine

Moguća rješenja zadataka za I razred

1. Ovdje ćemo koristiti teoreme o određenosti ravni: dvije paralelne prave određuju jednu ravan; prava i tačka van nje određuju jednu ravan; tri nekolinearne tačke određuju jednu ravan (3b).

Tri paralelne prave određuju najviše <u>tri ravni</u> (svaki par po jednu) (6b).

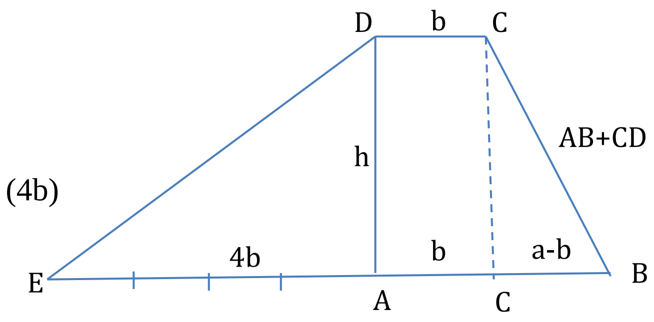
Svaka od pet tačaka sa proizvoljnom od tri prave određuje najviše jednu novu ravan što je najviše $\underline{5\cdot 3=15}$<u>ravni</u> (7b).

Konačno, pet tačaka od kojih su tri kolinearne određuju najviše <u>*pet ravni*</u>. Naime, ako sa A_1, A_2, A_3 označimo kolinearne tačke, a sa A_4 i A_5 preostale dvije, onda A_1, A_2, A_3 određuju jednu pravu koja sa preostale dvije tačke određuje najviše *2 ravni* (4b), i tačke A_4 i A_5 sa tačkama A_1, A_2, A_3 određuju najviše *3 ravni*. (svaku ravan određuju tačke A_4, A_5 i jedna od tačaka A_1, A_2, A_3) (4b).

Konačno, tri paralelne prave i pet tačaka od kojih su tri kolinearne određuju najviše

3+15+5= 23 ravni (3b). (27b)

2.



Nacrtajmo sliku prema uslovima zadatka. Označimo sa C´ podnožje normale iz tačke C na pravu AB. Neka je AB = a, AC˙= CD = b i CC˙=AD = h. (4b)

Primijenimo Pitagorinu teoremu na trouglove CC˙B, BAD i EAD:

$h^2=(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$ (4b); $BD^2=a^2+h^2=a^2+4ab$ (4b); $DE^2=(4b)^2+h^2=16b^2+4ab$ (4b).

Najzad, kako je $BD^2+DE^2=a^2+8ab+16b^2=(a+4b)^2=BE^2$ (4b) to iz

obrnute Pitagoreve teoreme u trouglu BDE slijedi da je $\measuredangle BDE=90^\circ$. (4b) (28b)

3.

	$-\infty$ 1	1 2	2 3	3 $+\infty$
x-1	-	+	+	+
x-2	-	-	+	+
x-3	-	-	-	+

(5b)

Razlikujemo sljedeće slučajeve:

a) posmatrajmo interval $x\epsilon(-\infty,\ 1)$, tada jednačina glasi:

$$-(x-1)-(x-2)-(x-3)=18$$

$$-x+1-x+2-x+3=18$$

$$-3x=12$$

$$x=-4\ \in Dp\text{ (4b)}$$

b) posmatrajmo interval $x\epsilon[1,2)$, tada jednačina glasi:

$$x-1-(x-2)-(x-3)=18$$

$$x-1-x+2-x+3=18$$

$$4-x=18$$

$$x=-14\notin Dp\text{ (4b)}$$

c) posmatrajmo interval $x\epsilon[2,3)$, tada jednačina glasi:

$$x-1+x-2-(x-3)=18$$

$$x=18\notin Dp\text{ (4b)}$$

d) posmatrajmo interval $x\epsilon[3,+\infty)$, tada jednačina glasi:

$$x-1+x-2+x-3=18$$

$$3x-6=18$$

$$x=8\ \in Dp\text{ (4b)}$$

Rješenje zadatka je $x=-4\ \ i\ \ x=8$ (1b). Kad ove vrijednosti uvrstimo u datu jednačinu dobiju se istinite jednakosti. (1b)

(23b)

4. Označimo sa A, B, C, redom, skupove učenika koji su rješavali prvi, drugi, treći zadatak, redom. Označimo sa

$$x = (A \cap B) \setminus C, \qquad y = (B \cap C) \setminus A, \qquad z = (A \cap C) \setminus B$$

brojeve učenika koji su rješavali tačno dva zadatka,

sa $t = A \cap B \cap C$, broj učenika koji su rješavali sva tri zadatka i

sa u broj učenika koji su riješili najviše jedan zadatak. (7b)

Iz uslova zadatka imamo

$x + t = 6,\ y + t = 7,\ z + t = 11\ \ i\ \ x + y + z + t + u = 21.$ (5b)

Oduzimanjem četvrte jednačine od zbira prve tri dobijemo

$2t = u + 3.$ (4b)

Odavde je očigledno $t \geq 2\ \ i\ \ u \geq 1\ \ (jer\ je\ \ u = 2t - 3\ \ neparan\ broj).$ (6b)

(22b)

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE

ZA II RAZRED

1. Za koje vrijednosti realnog parametra m jednačina

$$x^2-(m+1)x+2m-4=0$$

ima realna rješenja, a da pritom zbir njihovih kvadrata bude najmanji moguć?

(28b)

2. Odredi sve kompleksne brojeve z za koje važi

$$|z| = |z-2i| \quad \text{i} \quad |z-1| = 1.$$

(22b)

3. Riješi sljedeću jednačinu :

$$\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}=1-\frac{1}{x}\ , \quad (x \neq 0).$$

(26b)

4. Dužine dviju visina trougla su 16 i 22. Pokazati da je dužina treće visine manja od 59.

(24b)

Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta.
Dozvoljena je upotreba samo pribora za crtanje i pisanje.
Rješenje svakog zadatka jasno obrazložiti.
Mnogo uspjeha u radu!

Zenica, 9. mart 2024.godine

Moguća rješenja zadataka za II razred

1. Neka su x_1 i x_2 rješenje postavljene jednačine. Iz Vijetovih formula imamo

$x_1 + x_2 = m + 1$ i $x_1 \cdot x_2 = 2m - 4$ (4b)

Prema tome slijedi

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (m+1)^2 - 2(2m-4) = m^2 - 2m + 9.$ (8b)

Posmatrajmo kvadratnu funkciju $f(m)=m^2-2m+9$.

Pošto je D = 4-36=-32 $\Longrightarrow D < 0 \; i \; a > 0$ (6b)

to funkcija $m^2 - 2m + 9$ ima minimum (u tjemenu) u tački $m = \frac{-(-2)}{2} = 1$ (4b) i tada važi $x_1^2 + x_2^2$ =8 jer je $f(m) = x_1^2 + x_2^2 = \frac{-32}{-4} = 8, tj. T_{min}$ (1,8). (3b)

Pošto je $m = 1$ jednačina iz postavke glasi $x^2 - 2x - 2 = 0$. Njena rješenja su zaista realna (diskriminanta je pozitivna $(-2)^2$ -4$\cdot$ $(-2) = 12 > 0)$. Rješenje zadatka je

$m = 1$ (3b). (28b)

2. Neka $\boldsymbol{z} = a + bi$, gdje je $a\,, b \in R$, zadovoljava dati sistem jednačina (2b). Tada iz prve jednačine zaključujemo $|a + bi\,| = |a + (b-2)i|$ (2b) odnosno

$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (b-2)^2}$, (4b)

Pa je poslije kvadriranja $b = 1$ (7b). Zamjenom u drugu jednačinu dobijemo

$1 = |(a-1) + i|, odnosno \;\; 1 = \sqrt{(a-1)^2 + 1}$, tj. $a = 1$ (5b)

Dakle jedno rješenje datog sistema jednačina je $z = 1 + i$ (2b)

(22b)

3. $\sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2-1}{x}} - \sqrt{\frac{x-1}{x}} = \frac{x-1}{x} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2-1}{x}} - \sqrt{\frac{x-1}{x}} - (\sqrt{\frac{x-1}{x}})^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\sqrt{\frac{x-1}{x}}\,(\sqrt{x+1} - 1 - \sqrt{\frac{x-1}{x}}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-1}{x}} = 0 \;\vee \left(\sqrt{x+1} - 1 - \sqrt{\frac{x-1}{x}} = 0\right) \Leftrightarrow$(4b)

Iz prve jednačine $\sqrt{\frac{x-1}{x}} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$ (2b)

Iz druge jednačine imamo:$\sqrt{x+1} - 1 - \sqrt{\frac{x-1}{x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{\frac{x-1}{x}} = 1 \;/^2$

$\Leftrightarrow x+1-2\sqrt{x+1}\sqrt{\frac{x-1}{x}}+\frac{x-1}{x}=1(2b) \Leftrightarrow x+1-2\sqrt{x+1}\cdot\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\frac{x-1}{x}=1$ (2b)

$$x+1-2\sqrt{x+1}\cdot\frac{\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x}}{x}+\frac{x-1}{x}=1 \quad /\cdot x, x\neq 0 \quad (2b)$$

$x^2+x-2\sqrt{x^2-1}\cdot\sqrt{x}+x-1=x$

$x^2-1-2\sqrt{x^2-1}\cdot\sqrt{x}+x=0 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x})^2=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}-\sqrt{x}=0\ (4b)$

$D.p.:\ x^2-1\geq 0 \wedge x>0$ (uslov zadatka $x\neq 0$) $\Leftrightarrow |x|\geq 1 \wedge x>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\geq 1 \vee x\leq -1 \wedge x>0 \Leftrightarrow x>1$ *(4b)*

$Riješimo\ sada\ jednačinu \quad \sqrt{x^2-1}-\sqrt{x}=0$

$$\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x} \quad /^2$$

$$x^2-x-1=0$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\notin D.p.$$

$$x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\in D.p.\ (5b)$$

Rješenja zadatka $x_1=1$ i $x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (1b)

(26b)

4. Neka je $h_a=16,\ h_b=22$. Tada je

$P=\frac{a\cdot 16}{2}=\frac{b\cdot 22}{2}=\frac{c\cdot h_c}{2}$ (6b) Odavde je $a=\frac{P}{8},\ b=\frac{P}{11},\ c=\frac{2P}{h_c}$ (6b).

Kako je svaka stranica veća od razlike druge dvije stranice (4b) to je

$c>a-b,\ tj.\ \frac{2P}{h_c}>\frac{P}{8}-\frac{P}{11};\ \frac{2P}{h_c}>\frac{3P}{88},tj.\ 176P>3Ph_c \Rightarrow h_c<\frac{176}{3}$ pa je $h_c<59$ (8b)

Što je i trebalo dokazati. (24b)

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE

ZA III RAZRED

1. Dijagonale trapeza dijele trapez na četiri trougla. Neka su površine trouglova uz osnovice P_1 i P_2. Dokazati da za površinu trapeza vrijedi relacija

$$P = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2})^2 \quad .$$

(25b)

2. Dokazati jednakost:

$$tg\alpha + tg(60^{\circ} + \alpha) + tg(120^{\circ} + \alpha) = 3tg3\alpha \ .$$

(25b)

3. Neka realni i pozitivni brojevi $a \ i \ b$ zadovoljavaju jednakost

$$log(1 + a^2) - loga - 2log2 = 1 - \log(100 + b^2) + logb.$$

Naći vrijednost sume $a + b$.

(28b)

4. Putanja Zemlje oko Sunca je elipsa sa Suncem u jednom fokusu (žarištu). Udaljenost Zemlje od Sunca u perihelu (tački u kojoj je Zemlja najbliža Suncu) približno iznosi 147 miliona kilometara, o udaljenost u afelu (tački u kojoj je Zemlja najudaljenija od Sunca) iznosi 152 miliona kilometara. Koliki je numerički ekscentricitet ε Zemljine putanje?

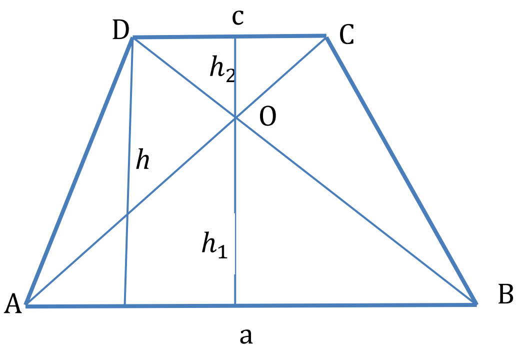
(22b)

Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta.
Dozvoljena je upotreba samo pribora za crtanje i pisanje.
Rješenje svakog zadatka jasno obrazložiti.
Mnogo uspjeha u radu!

Zenica, 9. mart 2024. godine

Moguća rješenja zadataka za III razred

1.



(5b)

Iz sličnosti trouglova $ABO\ \ i\ \ CDO$ slijedi:

$$\mathrm{a}:\mathrm{c} = \mathrm{h}_1:\mathrm{h}_2 \ \Rightarrow\ c\cdot h_1 = a\cdot h_2 \ \Rightarrow\ h_1 = \frac{a}{c}\cdot h_2 \text{ (5b)}$$

Neka je $P_1 = P_{\Delta ABO}$, $P_{2=}\ P_{\Delta CDO}$ i $h = h_1 + h_2\ (3b)$. Tada je:

$$\left(\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}\right)^2 = P_1 + 2\sqrt{P_1\cdot P_2} + P_2 = \frac{a\cdot h_1}{2} + 2\cdot\sqrt{\frac{a\cdot h_1}{2}\cdot\frac{c\cdot h_2}{2}} + \frac{c\cdot h_2}{2} =$$

$$= \frac{a\cdot h_1}{2} + 2\cdot\sqrt{\frac{a\cdot\frac{a}{c}\cdot h_2}{2}\cdot\frac{c\cdot h_2}{2}} + \frac{c\cdot h_2}{2} = \frac{a\cdot h_1}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{c}\cdot h_2\cdot c\cdot h_2} + \frac{c\cdot h_2}{2} =$$

$$= \frac{a\cdot h_1}{2} + a\cdot h_2 + \frac{c\cdot h_2}{2} = \frac{a\cdot h_1}{2} + \frac{a\cdot h_2}{2} + \frac{a\cdot h_2}{2} + \frac{c\cdot h_2}{2} =$$

$$= \frac{a}{2}(h_1+h_2) + \frac{a\cdot\frac{c}{a}\cdot h_1}{2} + \frac{c\cdot h_2}{2} = \frac{a}{2}\,(h_1+h_2) + \frac{c\cdot h_1}{2} + \frac{c\cdot h_2}{2} = \frac{a}{2}(h_1+h_2) + \frac{c}{2}\,(h_1+h_2) =$$

$$= (h_1+h_2)\left(\frac{a}{2}+\frac{c}{2}\right) = \frac{a+c}{2}\cdot h = P(12b)$$

(25b)

2. $tg\alpha + tg(60^\circ + \alpha) + tg(120^\circ + \alpha) = 3tg3\alpha$

$$tg\alpha + tg(60^\circ+\alpha) + tg\left(120^\circ+\alpha\right) = \quad tg\alpha + \frac{tg60^\circ + tg\alpha}{1 - tg60^\circ\cdot tg\alpha} + \frac{tg120^\circ + tg\alpha}{1 - tg120^\circ\cdot tg\alpha} = tg\alpha + \frac{\sqrt{3}+tg\alpha}{1-\sqrt{3}\cdot tg\alpha} +$$

$$+ \frac{-\sqrt{3}+tg\alpha}{1+\sqrt{3}\cdot tg\alpha} =$$

$$= tg\alpha + \frac{\sqrt{3}+3tg\alpha+tg\alpha+\sqrt{3}tg^2\alpha-\sqrt{3}+3tg\alpha+tg\alpha-\sqrt{3}tg^2\alpha}{1-3tg^2\alpha} = tg\alpha + \frac{8tg\alpha}{1-3tg^2\alpha} = tg\alpha\ \left(1+\frac{8}{1-3tg^2\alpha}\right) =$$

$$= tg\alpha\cdot\frac{1-3tg^2\alpha+8}{1-3tg^2\alpha} = 3tg\alpha\cdot\frac{3-tg^2\alpha}{1-3tg^2\alpha} = 3tg3\alpha \text{ . (18b)}$$

Jer je $(tg(3\alpha) = tg\,(2\alpha+\alpha) = \frac{tg2\alpha+tg\alpha}{1-tg2\alpha\cdot tg\alpha} = \frac{\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}+tg\alpha}{1-\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}\cdot tg\alpha} = \frac{\frac{2tg\alpha+tg\alpha-tg^3\alpha}{1-tg^2\alpha}}{\frac{1-tg^2\alpha-2tg^2\alpha}{1-tg^2\alpha}} = \frac{2tg\alpha+tg\alpha-tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha} =$

$= \frac{3tg\alpha-tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha} = tg\alpha\cdot\frac{3-tg^2\alpha}{1-3tg^2\alpha}$) (7b)

(25b)

3. $\log(1+a^2) - log a - 2log2 = 1 - \log(100+b^2) + logb.$

$\log(1+a^2) + \log(100+b^2) = loga + \log b + log2^2 + log10$ (1b)

log $(1+a^2)\,(100+b^2) = log40ab \Leftrightarrow (1+a^2)(100+b^2) = 40ab \quad (*)(4b)$

Jednakost ($*$) se transformiše u jednačinu (kvadratnu po a) :

$$(100+b^2)a^2 - 40ab + 100 + b^2 = 0 \ \ (2b)$$

$$a_{1,2} = \frac{40b\pm\sqrt{(40b)^2-4(100+b^2)^2}}{2(100+b^2)}\ (**) \quad \text{(3b)}$$

Pošto je $a \in R^+$ to mora biti $D \geq 0$ $(3b)$, tj. $D = b^2 - 4ac$; $D = (40b)^2 - 4(100+b^2)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow D = \big(40b + 2(100+b^2)\big)(40b - 2(100+b^2))$$

$$D = 2(20b+100+b^2)\,2\,(20b-100-b^2)$$

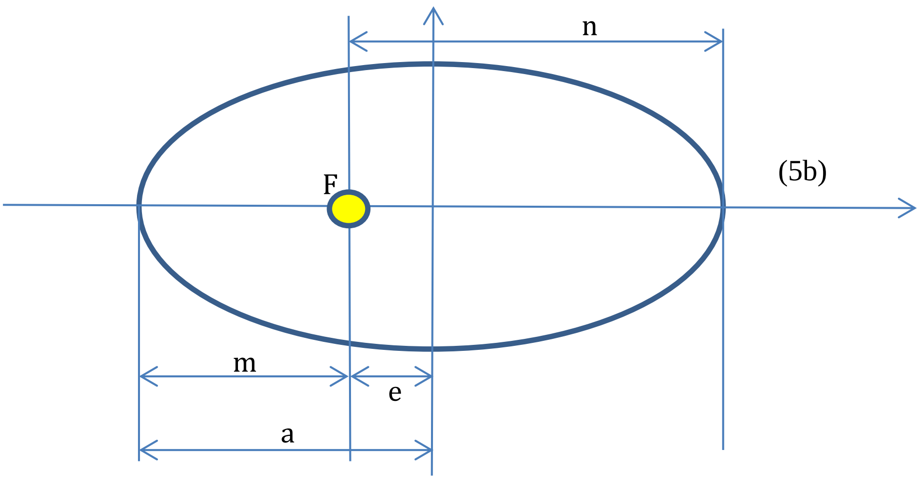
$$-4\,(b^2+20b+100)(\,b^2-20b+100) \geq 0$$

$$(b+10)^2\,(b-10)^2 \leq 0 \quad \text{(7b).}$$

Ovdje jedino vrijedi jednakost ako je $b = 10\,(jer\ je\ b > 0)\,(3b)$, tada je iz $(**)$ $a = 1\,(3b)$ tj. $a + b = 11\ \ (2b)$.

(28b)

4.



(5b)

Označimo sa $m = 147\,000\,000\ km = 1{,}47\ \cdot 10^8 km$, a sa $n = 152\,000\,000\ km = 1{,}52\ \cdot\ 10^8 km$ (2b)

Sa slike je $m + n = 2a \ \Rightarrow a = \frac{m+n}{2}$ (2b). Računajmo linearni ekscentricitet elipse (slika) :

$$m + e = a \Rightarrow e = a - m \Rightarrow e = \frac{m+n}{2} - m \Rightarrow e = \frac{n-m}{2} \ (4b)$$

Numerički ekscentricitet $\mathcal{E}$ Zemljišne putanje je: $\mathcal{E} = \frac{e}{a} \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{\frac{n-m}{2}}{\frac{m+n}{2}} \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{n-m}{m+n} =$

$$= \frac{1{,}52 \cdot 10^8 km - 1{,}47 \cdot 10^8 km}{1{,}47 \cdot 10^8 km + 1{,}52 \cdot 10^8 km} = \frac{(1{,}52 - 1{,}47) \cdot 10^8 km}{(1{,}47 + 1{,}52) km} = \frac{1{,}52 - 1{,}47}{1{,}47 + 1{,}52} = \frac{0{,}05}{2{,}99} \cdot \frac{100}{100} = \frac{5}{299}.$$

Znači $\mathcal{E} = \frac{5}{299}$ (9b). (22b)

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE

ZA IV RAZRED

1. Za ekipu jedne škole u šahu treba izabrati tri takmičara od 11 kandidata među kojima je 6 dječaka i 5 djevojčica. Na koliko načina se to može učiniti ako se zna da u ekipi mora biti bar jedna djevojčica?

(24b)

2. U aritmetičkom nizu prvi član je negativan i iznosi -405, a razlika u ovom nizu je 18. Suma apsolutnih vrijednosti prvih n članova ovog niza iznosi 5661. Naći n .

(28b)

3. Odredi graničnu vrijednost

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\cdots+\frac{1}{(4n+1)\cdot(4n+5)}\right).$$

(20b)

4. Neka je $f(x)=\frac{\ln(ax+1)}{\ln(bx+1)}$, $0<a<b$. Dokazati da je funkcija $f(x)$ rastuća na intervalu $(0,\infty)$.

(28b)

Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta.
Dozvoljena je upotreba samo pribora za crtanje i pisanje.
Rješenje svakog zadatka jasno obrazložiti.
Mnogo uspjeha u radu!

Zenica, 9. mart 2024. godine

Moguća rješenja zadataka za IV razred

1. Po uslovu zadatka ekipa se može sastojati od: tri djevojčice, dvije djevojčice i jednog dječaka, ili jedna djevojčica i dva dječaka. (6b)

U prvom slučaju ekipa se može odabrati na $\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2} = 10$ načina. (5b)

U drugom slučaju ekipa se može odabrati na $\frac{5\cdot4}{2}\cdot 6 = 60$ načina. (5b)

U trećem slučaju ekipa se može odabrati na $5\cdot\frac{6\cdot5}{2} = 75$ načina. (5b)

Dakle, ukupan broj načina da se ekipa odabere je 145. (3b)

(24b)

2. Kako je 405 =18· 22 +9 (2b), to je a_{23}= - 405 +18 ·22 = – 9 (3b), a_{24} = 9 (2b).

Kako je $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{23}| = \frac{405+9}{2}\cdot 23 = 207\cdot 23 = 4761\ (5b)$, to sada imamo

$$a_{24} + a_{25} + \ldots + a_n = 5661 - 4761 = 900\ (3b).$$

Neka je u posljednjoj sumi k sabiraka. Kako je

a_n= 9 +18 (k-1) = 18k –9 (3b), to imamo jednačinu

$\frac{9+(18k-9)}{2}\cdot k = 900\ (4b) \Leftrightarrow 9k^2 = 900 \Leftrightarrow k^2 = 100$, te k=10 (3b).

Zato je n= 23+k=23+10=33 (3b) (28b)

3. $lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot5} + \frac{1}{5\cdot9} + \frac{1}{9\cdot13} + \cdots + \frac{1}{(4n+1)\cdot(4n+5)}\right)$ =*

Pošto vrijedi da je $\frac{1}{4}\cdot\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{5-1}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = \frac{1}{1\cdot5}$; (5b)

$$\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{20} - \frac{1}{36} = \frac{9-5}{180} = \frac{4}{180} = \frac{1}{45} = \frac{1}{5\cdot9} \ldots \text{(5b)}$$

Analogno možemo naći i sve ostale sabirke, pa je

$$*= lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{9}} + \cancel{\frac{1}{9}} - \cancel{\frac{1}{13}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{4n+1}} - \frac{1}{4n+5}\right) = lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4n+5}\right) = \frac{1}{4} \text{(10b)}$$

(20b)

4. Dovoljno je pokazati da je prvi izvod funkcije $f(x)$ pozitivan na intervalu $(0, +\infty)$ (4b). Imamo da je

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{ax+1} \cdot a \cdot \ln(bx+1) - \frac{1}{bx+1} \cdot b \cdot \ln(ax+1)}{ln^2(bx+1)} =$$

$$= \frac{\frac{aln(bx+1)\cdot(bx+1) - b\cdot\cdot\ln(ax+1)\cdot(ax+1)}{(ax+1)\cdot(bx+1)}}{ln^2(bx+1)} = \frac{a\cdot(bx+1)\cdot\ln(bx+1) - b\cdot(ax+1)\cdot\ln(ax+1)}{(ax+1)(bx+1)ln^2(bx+1)} \quad \text{(6b)}$$

Označimo sa $g(x)$ brojnik poslednjeg razlomka.

$$g(x) = a(bx+1)\ln(bx+1) - b(ax+1)\ln(ax+1) \quad (2b)$$

Odredimo $g'(x)$.

$g'(x) = [a(bx+1)]'\ln(bx+1) + \cancel{\frac{1}{bx+1} \cdot b \cdot a \cdot (bx+1)} - [b(ax+1)]'\ln(ax+1) - -\frac{1}{ax+1} \cdot \cancel{a \cdot b \cdot (ax+1)} = b \cdot a \cdot (\ln(bx+1) - \ln(ax+1)) = a \cdot b \cdot \ln\frac{bx+1}{ax+1}$

$$g'(x) = a \cdot b \cdot \ln\frac{bx+1}{ax+1} (6b)$$

Pošto je $0 < a < b$ imamo da je $g'(x) = abln\frac{bx+1}{ax+1} > 0 \ za \ x \in (0, +\infty) \ (4b)$. Prema tome funkcija g(x) raste na intervalu $(0, +\infty) \ (2b)$. Kako je $g(0) = 0$, to je $g(x) > 0 \ za$

$x \in (0, +\infty) \ (2b)$. Tada je i $f'(x) > 0 \ za \ x \in (0, +\infty)$, tj. funkcija $f(x)$ raste na tom intervalu (2b).

(28b)