KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
ZA I RAZRED

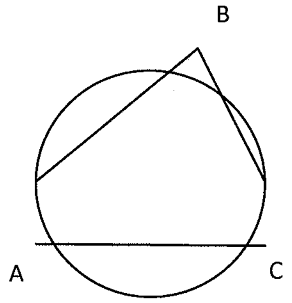
Z A D A C I

1. Došavši u hotel, putnik zatraži noćenje. Novac nije imao, ali je zato imao zlatni lanac sa šest karika. On reče vlasniku da će mu za svaku noć platiti po jednu kariku. Vlasnik se složi s tim da samo jedna karika na lancu može biti prerezana, a ostale čitave. Nakon kraćeg razmišljanja putnik pristane. Svaki dan mu je davao samo jednu kariku i samo jedna karika je bila prerezana, a ostale čitave. Kako je to moguće?

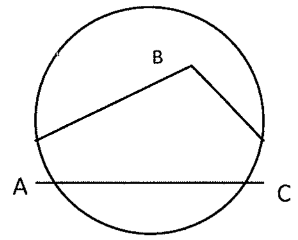
2. Naći sve nenegativne cijele brojeve a, b, c, d za koje je

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + bc + cd + ad = 8.$$

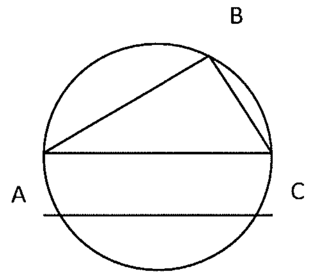
3. U XIII vijeku arapski matematičar Abu Hasan je objašnjavao kako se sigurno može utvrditi da li je dati ugao ABC oštar, tup ili prav. Abu Hasan predlaže da se nacrta krug prečnika AC, pa prema tome da li je tačka B van kruga, u krugu ili na krugu, donosi se zaključak da je ugao ABC oštar, tup ili prav. (Vidjeti sl. 1, 2 i 3). Dokazati ili opovrgnuti Abu Hasanovu konstataciju.



sl.1.



sl.2.



sl.3.

4. Dokazati da broj $n^2 + 1$ nije djeljiv sa 3 ni za jedan prirodan broj n.

Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta.

Dozvoljena je upotrba samo pribora za crtanje i pisanje.

Svaki zadatak nosi po 25 bodova, a rješenja je potrebno detaljno obrazložiti.

Mnogo uspjeha u radu!

Visoko, 23.03.2013.godine.

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
ZA II RAZRED

ZADACI

1. Nađite sva rješenja jednačine

$$(6x + 7)^2 (3x + 4) (x + 1) = 6.$$

2. Odrediti sve kompleksne brojeve $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, koji su konjugovani svom kvadratu.

3. Dužine stranica trougla su a, b i c, a veličine uglova naspram stranice b i c su $\beta = 50^\circ$ i $\gamma = 100^\circ$. Dokazati jednakost

$$ab = c^2 - b^2$$

4. Riješiti eksponencijalnu jednačinu $|2^x - 1| + |2^x - 2| = 1$.

Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta.

Dozvoljena je upotrba samo pribora za crtanje i pisanje.

Svaki zadatak nosi po 25 bodova, a rješenja je potrebno detaljno obrazložiti.

Mnogo uspjeha u radu!

Visoko, 23.03.2013. godine

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE

ZA III RAZRED

ZADACI

1. Dati su realni brojevi a, b, c veci od 1. Dokaži sljedeću nejednakost

$$\log_a bc + \log_b ca + \log_c ab \geq 4(\log_{ab} c + \log_{bc} a + \log_{ca} b).$$

2. Ako je

$\cos\alpha + \cos\beta = a$, $\sin\alpha + \sin\beta = b$, $a^2 + b^2 \neq 0$, odredi $\cos(\alpha + \beta)$.

3. Riješiti jednačinu

$$\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}.$$

4. Jedan ugao trougla je dva puta veći od drugog, a razlika dužina njima naspramnih stranica je 2cm. Treća stranica trougla je 5cm. Naći površinu trougla.

Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta.

Dozvoljena je upotrba samo pribora za crtanje i pisanje.

Svaki zadatak nosi po 25 bodova, a rješenja je potrebno detaljno obrazložiti.

Mnogo uspjeha u radu!

Visoko, 23.03.2013. godine.

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
ZA IV RAZRED

ZADACI

1. Za svaki prirodan broj n funkcija $f : N \to R$ zadovoljava uslov
$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = n^2 f(n).$$

Ako je $f(1) = 2014$, odredite $f(2013)$.

2. Poluprečnik upisane kružnice u pravougli trougao ima dužinu 1, tj. $r = 1$, a hipotenuza dužinu c. Dokazati da je
$$c \geq 2 + 2\sqrt{2}.$$

3. Odredi članove a_1, a_2, a_3, a_4 aritmetičkog i b_1, b_2, b_3, b_4 geometrijskog niza ako je $a_1 + b_1 = 23$, $a_2 + b_2 = 21$, $a_3 + b_3 = 22$ i $a_4 + b_4 = 29$.

4. Matematičkom indukcijom dokaži da vrijedi jednakost
$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \ldots \cdot \cos 2^n x = \frac{\sin 2^{n+1} x}{2^{n+1} \sin x}, \text{ (gdje je } n = 0,1,2,\ldots).$$

Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta.

Dozvoljena je upotrba samo pribora za crtanje i pisanje.

Svaki zadatak nosi po 25 bodova, a rješenja je potrebno detaljno obrazložiti.

Mnogo uspjeha u radu!

Visoko, 23.3.2013. godine

Kantonalno takmičenje iz matematike

Moguća rješenja zadataka za 1. razred

1. Prerezana je treća karika, tako da smo dobili jednu slobodnu (prerezanu), dvije vezane i tri vezane.
   Prvi dan mu je dao jednu (slobodnu) kariku.

   Drugi dan mu je dao dvije vezane, a vlasnik mu je vratio jednu.

   Treći dan mu je dao tri, a ovaj mu je vratio dvije.

   Četvrti dan mu je opet dao samo jednu.

   Peti dan mu je dao dvije a ovaj mu je vratio jednu.

   Šesti dan mu je dao jednu.

2. Datu jednakost pomnožimo sa 2 pa imamo
   $(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + d)^2 + (d + a)^2 = 16.$

   Budući da su a, b, c, d nenegativni cijeli brojevi, odavde slijedi samo jedna mogućnost:

   $a + b = 2$, $b + c = 2$, $c + d = 2$, $d + a = 2$, što daje sljedeća rješenja:

   $a = b = c = d = 1$ ili $a = 0 = c, b = 2 = d$ ili $a = 2 = c, b = 0 = d$.

3. Slučaj pravog ugla (slika 3.u zadatku) poznat nam je (periferijski ugao čiji je centralni ugao 180^0). U slučaju oštrog ugla uočimo tačku D (nacrtaj na slici 1.) u kojoj jedna stranica, recimo AB, siječe polukrug (slika1.). Ugao ADC je spoljašnji ugao za trougao BCD, pa je ugao CBD manji od ugla ADC nad prečnikom, dakle pravim uglom, pa slijedi da je ugao ABC oštar. Slično postupamo u slučaju tupog ugla (slika2.). Znači Abu Hasanove konstatacije su ispravne.

4. Prirodan broj n može biti oblika
   $3k,\ 3k - 1$ ili $3k - 2,$

za neki prirodan broj k. Ako je $n = 3k$, tada je $n^2 + 1 = 9k^2 + 1$, što nije djeljivo sa tri. Ako je $n = 3k - 1$, tada je $n^2 + 1 = (3k - 1)^2 + 1 = 3(3k^2 - 2k) + 2$, što nije djeljivo sa 3. Ako je $n = 3k - 2$, tada je $n^2 + 1 = (3k - 2)^2 + 1 = 3(3k^2 - 4k + 1) + 2$, što takođe nije djeljivo sa 3. Time je ovaj dokaz u potpunosti završen.

Visoko, 23.03.2013. godine

Moguća rješenja za II razred:

1. Jednačinu zapišimo u obliku

$(6x + 7)^2 (3x + 4) (3x + 3) = 18.$

Supstitucijom $t = 3x + \frac{7}{2}$ dobijemo jednačinu $(2t)^2 (t + \frac{1}{2}) (t- \frac{1}{2}) = 18$, a sređivanjem $4t^4 - t^2 - 18 = 0$.

Rješavanjem bikvadratne jednačine dobijemo: $t^2 = \frac{9}{4} \Longrightarrow t_{1,2} = \pm \frac{3}{2}$; $t^2 = -2 \Longrightarrow t_{3,4} = \pm i\sqrt{2}$

Kad vratimo u prvobitnu smjenu dobiju se ova četiri rješenja:

$3x_1 + \frac{7}{2} = \frac{3}{2} \Longrightarrow x_1 = -\frac{2}{3}$, i na sličan način $x_2 = -\frac{5}{3}$; $x_{3,4} = -\frac{7}{6} \pm \frac{i\sqrt{2}}{3}$.

2. Kako je $\bar{z} = x - yi$ i $z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$, iz $\bar{z} = z^2$ slijedi

$x = x^2 - y^2$ i $-y = 2xy$.

Iz druge dobijene jednačine slijedi da ili je $y = 0$ ili $x = -\frac{1}{2}$.

1^0 Ako je $y = 0$ prva jednačina postaje $x = x^2$, tj. $x \in \{0, 1\}$.

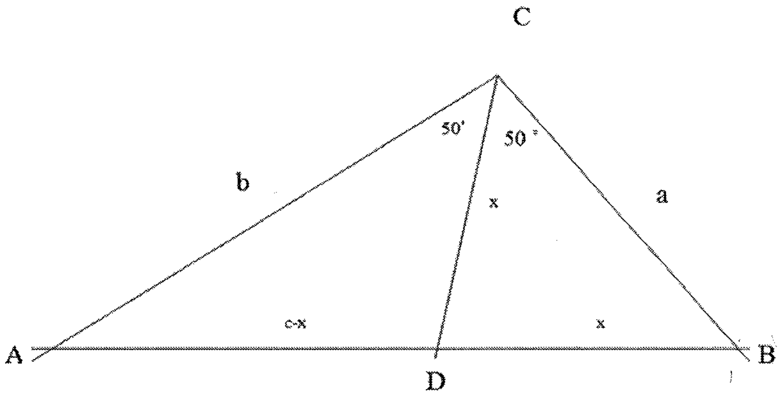
2^0 Ako je $x = -\frac{1}{2}$, prva jednačina postaje $y^2 = \frac{3}{4}$, tj. $y \in \{\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\}$.

Dakle rješenje zadatka je $z \in \{0, 1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$.

3. Simetrala ugla kod vrha C trougla ABC siječe stranicu $\overline{AB}$ u tački D. Označimo $x = |BD|$. Tada je i $|CD| = x$ jer je trougao BCD jednakokraki. Trouglovi ABC i ACD su slični (isti uglovi) pa je

$$\frac{|BC|}{|CD|}=\frac{|CA|}{|AD|}=\frac{|AB|}{|CA|}, \text{ tj. } \frac{a}{x}=\frac{b}{c-x}=\frac{c}{b}$$. Odakle slijedi $x=\frac{ab}{c}$ i $c(c-x)=b^2$. Pa imamo

$c(c-\frac{ab}{c})=b^2$, $ab=c^2-b^2$



4. Kako je $|2^x-1|=\{2^x-1, x\geq 0$ i $-(2^x-1), x<0\}$; $|2^x-2|=\{2^x-2, x\geq 1$ i $-(2^x-2), x<1\}$ tada data jednačina ima sljedeće oblike za različite x:
   a) $x<0$: $-(2^x-1)-(2^x-2)=1 \Leftrightarrow 2^x=1 \Leftrightarrow x=0$ štozbog zahtjeva $x<0$ nećemo prihvatiti kao rješenje,
   b) $0\leq x<1$: $2^x-1-(2^x-2)=1 \Leftrightarrow 1=1$, pa je rješenje svako x koje je $0\leq x<1$;
   c) $x\geq 1$: $2^x-1+2^x-2=1 \Leftrightarrow 2^x=2 \Leftrightarrow x=1$. Dakle, svako $x \in [0,1]$ je rješenje jednačine.

Visoko, 23.03.2013.godine.

Kantonalno takmičenje iz matematike

Moguća rješenja za III razred:

1. Za x,y > 1 vrijedi $\log_y x = \dfrac{\log x}{\log y}$.

Neka je x = loga, y = logb, z = logc. Zbog a,b,c > 1 vrijedi x,y,z > 0. Polazna nejednakost može se napisati u ekvivalentnom obliku

$$\frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} \geq \frac{4x}{y+z} + \frac{4y}{z+x} + \frac{4z}{x+y}.$$

Dovoljno je pokazati

$$\frac{z}{x} + \frac{z}{y} \geq \frac{4z}{x+y}$$ (ova nejednakost slijedi iz A – H nejednakosti)

Sređivanjem dobijemo $z(x-y)^2 \geq 0$, što vrijedi. Zato vrijedi i polazna nejednakost.

2. Kvadrirajmo date jednakosti

$a^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta$

$b^2 = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta$

Sabiranjem i oduzimanjem ovih jednakosti imamo:

$a^2 + b^2 = 2 + 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = 2 + 2\cos(\alpha-\beta) = 2(1 + \cos(\alpha-\beta))$

$a^2 - b^2 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\beta - \sin^2\beta + 2(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) =$

$= \cos2\alpha + \cos2\beta + 2\cos(\alpha+\beta) = 2\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta) + 2\cos(\alpha+\beta) =$

$= 2\cos(\alpha+\beta)\cdot[\cos(\alpha-\beta) + 1]$.

Budući da je

$$\cos(\alpha-\beta) + 1 = \frac{a^2+b^2}{2} \neq 0,$$ dobijemo da je

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

3. Na osnovu poznate jednakosti

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ uzimajući $a = \sqrt[3]{x+1}$, $b = \sqrt[3]{3x+1}$, imamo da vrijedi

$\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}$ / ^{3} (*)

Kad (*) kubiramo imamo $x + 1 + 3\sqrt[3]{x+1}\,\sqrt[3]{3x+1}\,(\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1}) + 3x + 1 = x - 1$

Zamijenimo ovo u zagradi na osnovu (*) sa $\sqrt[3]{x-1}$ imamo

$4x + 2 + 3\sqrt[3]{x+1}\,\sqrt[3]{3x+1}\,\sqrt[3]{x-1} = x - 1$ i sređivanjem imamo

$\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)(x-1)} = -(x+1)$ /^{3}

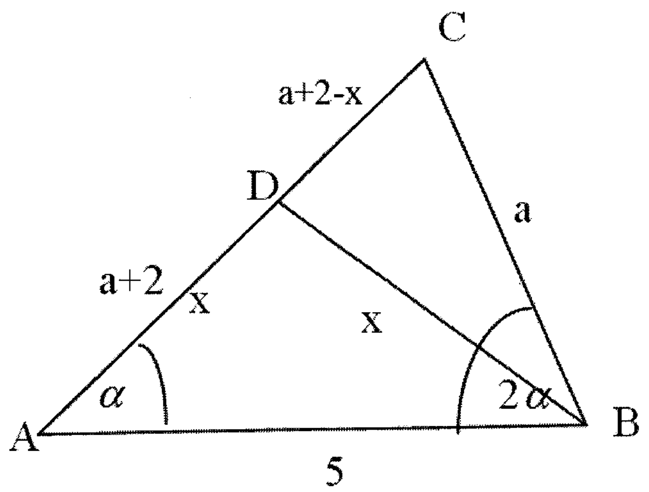
$(x+1)(3x+1)(x-1) = -(x+1)^3$

$(x+1)\left[(3x+1)(x-1) + (x+1)^2\right] = 0$. Sređivanjem imamo $(x+1)\left[4x^2\right] = 0$

$\Leftrightarrow$ ($x_1 = -1$ ili $x_2 = 0$)

Međutim neophodna je provjera. Naime, $x_2 = 0$ nije rješenje jednačine (*); ono se pojavilo kao rezultat zamjene lijeve strane jednačine (*) sa desnom stranom koja nije identički jednaka. Dakle rješenje je $x = -1$.

4.



Neka je BD simetrala većeg ugla. Tada je ΔABD jednakokraki, a ΔABC i ΔBDC slični. Dakle,

$$\frac{a+2-x}{x}=\frac{a}{5} \quad \text{i} \quad \frac{a+2}{a}=\frac{a}{a+2-x}$$

Iz prve jednačine dobijemo

x = $\frac{5(a+2)}{a+5}$ a iz druge x = $\frac{4(a+1)}{a+2}$ izjednačavanjem dobijemo da je a = 4. Stranice trougla su 4 cm, 6 cm, 5 cm. Površina trougla P = $\frac{15\sqrt{7}}{4}$ cm^2.

Visoko, 23.03.2013. godine

Kantonalno takmičenje iz matematike

Moguća rješenja za IV razred:

1. Oduzimanjem datih jednačina za n i n-1

$f(1) + f(2) +\ldots+ f(n) = n^2 f(n)$ i $f(1) + f(2) +\ldots+ f(n-1) = (n-1)^2 f(n-1)$, dobije se

$f(n) = n^2 f(n) - (n-1)^2 f(n-1),\ldots\ f(n) = \dfrac{(n-1)f(n-1)}{n+1}$ za $n\geq 2$. Odavde slijedi

$$f(n) = \frac{n-1}{n+1}\cdot f(n-1) = \frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot f(n-2) = \cdots = \frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot f(1) = \frac{2f(1)}{n(n+1)}$$

$f(1) = 2014$ za $n = 2013$ dobijemo

$$f(2013) = \frac{2\cdot 2014}{2013\cdot 2014} = \frac{2}{2013}$$

2. Imamo $c^2 = a^2 + b^2$, te $r = \dfrac{a+b-c}{2}$, tj. $\dfrac{a+b-c}{2} = 1 \Rightarrow a + b = 2 + c$.

Iz očigledne jednakosti

$$ab = \frac{(a+b)^2 - (a^2 + b^2)}{2} \Rightarrow 2ab = (2 + c)^2 - c^2 \Rightarrow ab = 2 + 2c.$$

Iz $\{a + b = 2 + c$ i $ab = 2 + 2c\} \Rightarrow$ da su a i b rješenja kvadratne jednačine

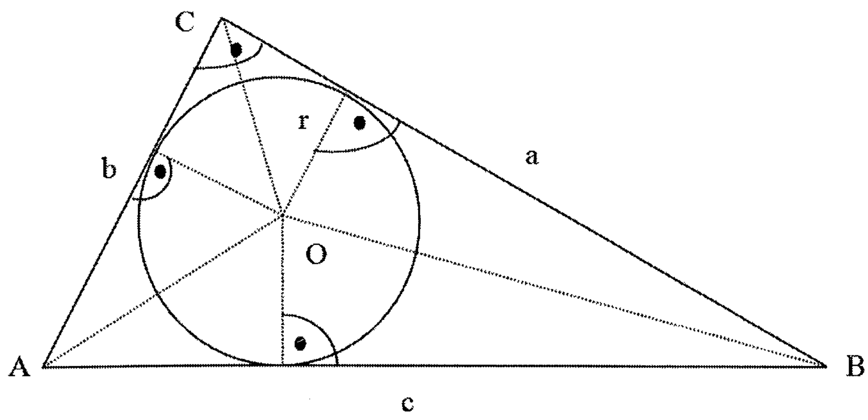
$t^2 - (c + 2)t + 2 + 2c = 0$, čija diskriminanta mora biti nenegativna, tj. $D \geq 0$

(jer $a,b \in R^+$ pa slijedi

$D = (c + 2)^2 - 4(2 + 2c) = c^2 - 4c - 4 \geq 0 \Rightarrow c \geq 2 + \sqrt{8} \Rightarrow c \geq 2 + 2\sqrt{2}$

(jer je $c > 0$).

Jednakost vrijedi za $a = b = 2 + 2\sqrt{2}$ (jednakokraki – pravougli trougao).



3. Ako je d razlika navedenog aritmetičkog niza a q količnik datog geometrijskog niza, gornji sistem jednačina je ekvivalentan sa
$a_1 + b_1 = 23$, $a_1 + d + b_1q = 21$, $a_1 + 2d + b_1q^2 = 22$ i $a_1 + 3d + b_1q^3 = 29$. Oduzimanjem prve od druge, druge od treće i treće od četvrte jednačine dobijemo ekvivalentan sistem

$a_1 + b_1 = 23$, $d + b_1(q-1) = -2$, $d + b_1q(q-1) = 1$ i $d + b_1q^2(q-1) = 7$. Oduzimanjem druge od treće i treće od četvrte jednačine dobijemo ekvivalentan sistem

$a_1 + b_1 = 23$, $d + b_1(q-1) = -2$, $b_1(q-1)^2 = 3$ i $b_1q(q-1)^2 = 6$. Pošto su vrijednosti

$b_1 = 0$ i $q = 1$ isključene, dijeljenjem četvrte sa trećom jednačinom konačno dobijemo ekvivalentan sistem

$a_1 + b_1 = 23$, $d + b_1(q-1) = -2$, $b_1(q-1)^2 = 3$ i $q = 2$. Rješenje posljednjeg sistema je

$q = 2$, $b_1 = 3$, $d = -5$ i $a_1 = 20$, odakle se dobije da su traženi nizovi.

$a_1 = 20$, $a_2 = 15$, $a_3 = 10$, $a_4 = 5$;

$b_1 = 3$, $b_2 = 6$, $b_3 = 12$, $b_4 = 24$.

4. 1^0 Za n=0 jednakost je tačna jer vrijedi

$$\cos x = \frac{\sin 2x}{2\sin x} = \frac{2\sin x\cos x}{2\sin x} = \cos x$$

2^0 Neka je jednakost tačna za $n=k\geq 0$, tj.

$$\cos x \cos 2x \ldots \cos 2^k x = \frac{\sin 2^{k+1}x}{2^{k+1}\sin x}$$

3^0 Pokazaćemo da je ona tačna i za n=k+1. Imamo

$$\cos x \cos 2x \ldots \cos 2^k x \cos 2^{k+1}x = \frac{\sin 2^{k+1}x\cos 2^{k+1}x}{2^{k+1}\sin x} = \frac{2\sin 2^{k+1}x\cos 2^{k+1}x}{2^{k+2}\sin x} = \frac{\sin 2^{k+2}x}{2^{k+2}\sin x}$$

Visoko, 23.03.2013.godine